Lista 5 - Introdução a Teoria dos Grupos.

1. Sejam H, K subgrupos cíclicos distintos do grupo G. Mostre que $H \cap K = \{e\}$.

2. Sejam m, n inteiros positivos. Mostre que $mdc(m, n) = 1$ se e somente se $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$. Neste caso, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ é cíclico.

3. Seja n inteiro positivo, $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_t^{r_t}$ a decomposição em potências de primos do inteiro n. Mostre que $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{p_1^{r_1}\mathbb{Z}} \oplus \dfrac{\mathbb{Z}}{p_2^{r_2}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \dfrac{\mathbb{Z}}{p_t^{r_t}\mathbb{Z}}$.

4. Seja G grupo abeliano, mostre que $T(G) = \{x \in G \mid o(x) < \infty\}$ é um subgrupo de G. $T(G)$ é denominado subgrupo de torção de G. Dizemos que G é um grupo abeliano livre de torção, se $T(G) = \{e\}$.

5. (a) Quais são os divisores elementares e os fatores invariantes do grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{35}$?
   (b) Idem para o grupo $\mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{1000}$.

6. Determine, a menos de isomorfismo, todos os grupos abelianos de ordem n, $n \leq 20$.

7. Determine os divisores elementares e os fatores invariantes do grupo $\mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{45}$

8. Seja G grupo abeliano finito. Definimos o expoente de G denotado $exp(G)$, como $exp(G) = mmc\{o(g) \mid g \in G\}$, isto é, o mínimo múltiplo comum das ordens dos elementos de G. Prove que G é cíclico se e somente se $|G| = exp(G)$.

9. Verifique-se os grupos $A = \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_4$ e $B = \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{16}$ são isomorfos.

10. Determine, a menos de isomorfismo, todos os grupos abelianos de ordem 352.

11. Sejam H, K subgrupos normais do grupo G tais que $H \cap K = \{e\}$. Mostre que $hk = kh$, para todo $h \in H$, todo $k \in K$.

12. Seja A um grupo abeliano de ordem p^k com p primo, e sejam $p^{e_i}, i = 1, \cdots, r$ os fatores invariantes de A, onde $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_r$. Mostre que A tem $p^r - 1$ elementos de ordem p.

13. Sejam K, H grupos, $\sigma : K \to Aut(H)$ homomorfismo de grupos tal que:
$$\sigma(k) = \sigma_k \in Aut(H), \forall k \in K.$$
Seja G o conjunto $H \times K$ e defina a seguinte operação sobre G:
$$(h, k)(h', k') = (h\sigma_k(h'), kk')$$
    (a) Prove que G munido da operação definida acima é um grupo. Esse grupo é chamado produto semidireto externo de H e K e é denotado por $H \times_\sigma K$;
    (b) Mostre que as aplicações
    $$\alpha : H \to H \rtimes_\sigma K, \alpha(h) = (h, e), \forall h \in H$$
    e
    $$\beta : K \to H \rtimes_\sigma K, \alpha(k) = (e, k), \forall k \in K$$
    são homomorfismos de grupos injetivos e que $\alpha(H) \lhd H \rtimes_\sigma K$.
    (c) $\beta(K) \lhd H \rtimes_\sigma K$ se, e somente se σ é trivial.

14. Seja G grupo e sejam $H \lhd G, K < G$ tais que $G = HK$. Mostre que é sempre possível definir um homomorfismo $\sigma : K \to Aut(H)$ de modo que $G \cong H \rtimes_\sigma K$;

15. Dê exemplo de grupo solúvel não nilpotente.

16. Mostre que a menos de isomorfismo os únicos grupos não abelianos de ordem 8 são D_8 e Q_8.

17. Sejam G, H grupos tais que $Aut(G) \cong Aut(H)$. É verdade que $G \cong H$?