Lista 6- Teoria Aritmética dos Números

1. Ache o resto da divisão:
   (a) de 7^{10} por 51
   (b) de 2^{100} por 11
   (c) de 14^{256} por 17
   (d) de $13^{16} - 2^{25}5^{15}$ por 13.

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ mostre que:
   (a) $101^{6n} - 1$ é divisível por 70
   (b) $19^{8n} - 1$ é divisível por 17.

3. Sejam a um inteiro e p um inteiro primo. Mostre que se $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ então $a \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a \equiv p - 1 \pmod{p}$.

4. Sejam m_1 e m_2 inteiros relativamente primos e a um inteiro. Prove que $a \equiv 0 \pmod{m_1 m_2}$ se e somente se $a \equiv 0 \pmod{m_1}$ e $a \equiv 0 \pmod{m_2}$. Mostre com um exemplo que a hipótese $mdc(m_1, m_2) = 1$ é essencial neste problema.

5. Mostre que um inteiro na base 10 é divisível por 6 se e somente se a soma do algarismo das unidades com o quadruplo de cada um dos outros algarismos é divisível por 6.

6. Seja p um inteiro primo e sejam a e b inteiros. Prove que $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

7. Seja a um inteiro. Mostre que a^5 e a têm o mesmo algarismo das unidades quando escritos na base 10.

8. Resolva as seguintes congruências lineares:
   (a) $25X \equiv 15 \pmod{29}$
   (b) $140X \equiv 133 \pmod{301}$
   (c) $17X \equiv 3 \pmod{210}$

9. Resolva os seguintes sistemas de congruências lineares:

(a) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod 7 \\ 3x \equiv 2 \pmod{11} \\ 4x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$

10. Mostre que o sistema de congruências lineares não tem solução: $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 6 \\ x \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$

11. Um certo inteiro entre 1 e 1200 tem por resto $1, 2$ e 6 quando dividido por $9, 11$ e 13. Determine-o.

12. Determine o menor inteiro a, maior que 100 tal que $2|a, 3|a+1, 4|a+2$, $5|a+3, 6|a+4$.