Lista 6 - Introdução a Teoria dos Grupos.

1. Um grupo G é dito ser solúvel se existir uma seqüência finita de subgrupos $H_0, H_1, \cdots, H_n$ tais que $H_i \lhd H_{i+1}$, $i = 0, \cdots, n-1$, com $H_0 = \{e\}, H_n = G$, e todos os grupos quocientes H_{i+1}/H_i abelianos, $i = 0, \cdots, n = 1$.

   (a) Prove que um subgrupo de um grupo solúvel é solúvel.

   (b) Mostre que a imagem homomórfica de um grupo solúvel é solúvel.

2. (a) Seja G grupo, $H \lhd G$. Mostre que se H for solúvel e G/H for solúvel então G é solúvel.

   (b) Seja G grupo, $A \leq G$, $H \lhd G$. Mostre que se A e H forem ambos solúveis então AN é solúvel.

3. Seja G grupo. Defina a seqüência de subgrupos $G^{(i)}$ de G da seguinte maneira: $G^{(1)} = G'$, o subgrupo derivado de G; $G^{(i)}$ é o subgrupo comutador de $G^{(i-1)}$ se $i > 1$.

   (a) Mostre que $G^{(i)} \lhd G$, para todo i.

   (b) Mostre que G é solúvel se e somente se $G^{(k)} = \{e\}$, para algum inteiro k.

4. Mostre que se G é um grupo solúvel não trivial então G possui um subgrupo normal abeliano M não trivial.

5. Seja G grupo. Defina a seqüência $\gamma_i(G)$ de subgrupos de G da seguinte forma

   (a) $\gamma_1(G) = G'$ o subgrupo comutador de G.

   (b) $\gamma_i(G)$ é o subgrupo gerado por todos os elementos da forma $aba^{-1}b^{-1}$, $a \in G, b \in \gamma_{i-1}(G)$.

   Um grupo G é nilpotente se $\gamma_k(G) = \{e\}$, para algum inteiro k.

   (a) Mostre que $\gamma_i(G) \lhd G$, para todo i.

   (b) Mostre que $G^{(i)} \leq \gamma_i(G)$ para todo i.

   (c) Mostre que se G é nilpotente então G é solúvel.

   (d) Dê exemplo de um grupo solúvel que não é nilpotente.

6. Mostre que todo subgrupo e imagem homomórfica de um grupo nilpotente são nilpotentes.

7. (a) Seja G grupo. Mostre que se $G/\mathcal{Z}(G)$ é nilpotente então G é nilpotente.

   (b) Mostre que todo subgrupo finito de ordem p^n, p primo, é nilpotente.

   (c) Seja G grupo nilpotente. Mostre que o centro de G é não trivial.

   (d) Mostre que toda imagem homomórfica de um grupo nilpotente é nilpotente.

8. Mostre que se G é um grupo nilpotente e $H \neq G$, $H \leq G$, então $N \subsetneqq N_G(H)$, onde $N_G(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$.