Lista 7- Teoria Aritmética dos Números

1. Construir as tabelas de soma e de produto de $\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ e de $\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$.

2. Em $\frac{\mathbb{Z}}{20\mathbb{Z}}$ determinar:

   (a) os menores representantes positivos de -10 e de -6.

   (b) todos os divisores do zero.

   (c) todos os elementos invertíveis e os seus respectivos inversos.

3. Para cada elemento $\overline{a}$ que é divisor do zero em $\frac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}$, determine $\overline{b} \neq 0$ tal que $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$.

4. Prove que o número de elementos invertíveis em $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ é $\phi(m)$, em que ϕ indica a função de Euler.

5. Seja $a \in \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}, \overline{a} \neq \overline{0}$. Prove que $\overline{a}$ é um divisor do zero ou é um elemento invertível.

6. Sejam $\overline{a}, \overline{b}$ e $\overline{c}$ elementos de $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, com $mdc(c, m) = 1$. Prove que se $\overline{ac} = \overline{b}\overline{c}$ então $\overline{a} = \overline{b}$. Dê um exemplo para mostrar que a hipótese $mdc(c, m) = 1$ é essencial neste problema.

7. Sejam p um inteiro primo e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ elementos de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$. Prove que $(\overline{a}+\overline{b})^p = \overline{a}^p + \overline{b}^p$.

8. Prove que 3640 é invertível em $\frac{\mathbb{Z}}{7297\mathbb{Z}}$ e ache o seu inverso.

9. Resolva as seguintes equações em $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$:

   (a) $\overline{3}x + \overline{2} = \overline{6}x + \overline{7}, m = 8$.

   (b) $(\overline{2}x + \overline{1})^5 + (\overline{2}x + \overline{2})^5 + \overline{5}x = \overline{0}, m = 5$.

   (c) $x^{21} - x = \overline{0}, m = 5$.

   (d) $x^8 - x = \overline{0}, m = 6$.

   (e) $x^{13} + (\overline{12!})x^{12} + x^3 + \overline{1} = \overline{0}, m = 13$

   (f) $x^{13} + (\overline{12!})x^{12} + x^3 + \overline{40} = \overline{0}, m = 91$

   (g) $x^{4p-4} + x^{2p-2} = \overline{5}, m = p$ (primo).