Lista 2 - Teoria Aritmética dos Números

1. (a) Mostre que um número natural $a$ é par se, e somente se, $a^n$ é par, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Mostre que $a^n \pm a^m$ é sempre par, quaisquer que sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Mostre que, se $a$ e $b$ são ímpares, então $a^2 + b^2$ é divisível por 2 mas não divisível por 4.

2. Quais são os números que, quando divididos por 5, deixam um resto igual:
   (a) a metade do quociente?
   (b) ao quociente?
   (c) ao dobro do quociente?
   (d) ao triplo do quociente?

3. (a) Mostre que, se um número $a$ não é divisvel por ´3, então $a^2$ deixa resto 1 na divisão por 3.
   (b) A partir desse fato, prove que, se $a$ e $b$ são inteiros tais que 3 divide $a^2 + b^2$, então $a$ e $b$ são divisíveis por 3.

4. Seja $N$ um número natural; prove que a divisão de $N^2$ por 6 nunca deixa resto 2. O resto da divisão do inteiro $N$ por 20 é 8. Qual é o resto da divisão de $N$ por 5?

5. Prove que todo inteiro ímpar é da forma $4k + 1$ ou $4k + 3$.

6. Prove que o quadrado de um inteiro é da forma $3k$ ou $3k + 1$.

7. Prove que o cubo de um inteiro é da forma $9k$, $9k + 1$ ou $9k + 8$.

8. Mostre que se um inteiro é um quadrado e também um cubo (como $64 = 8^2 = 4^3$), então ele é da forma $7k$ ou $7k + 1$.

9. Prove que todo inteiro da forma $6k + 5$ é também da forma $3k + 2$, mas não vale a recíproca.

10. Mostre que para todo inteiro $n \geq 1$:
    (a) $6 | n^3 + 11n$

(b) $8|3^{2n} + 7$.

11. Determine os inteiros $a$ e $b$ tais que o quociente e o resto na divisão de $a$ por $b$ sejam $q = 16, r = 4$ e que ainda se verifique $a - b = 184$.

12. Se a é um inteiro ímpar, prove que $24|a(a^2 - 1)$.

13. Ache o menor múltiplo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4.