Lista 2

1. Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ não são isomorfos.

2. Determine o corpo de decomposição do polinômio $x^4 - 2$ e o seu grau sobre $\mathbb{Q}$.

3. Determine o corpo de decomposição do polinômio $x^4 + 2$ e o seu grau sobre $\mathbb{Q}$.

4. Determine o corpo de decomposição do polinômio $x^4 + x^2 + 1$ e o seu grau sobre $\mathbb{Q}$.

5. Determine o corpo de decomposição do polinômio $x^5 - 3$ e o seu grau sobre $\mathbb{Q}$.

6. Determine o corpo de decomposição do polinômio $x^6 - 4$ e o seu grau sobre $\mathbb{Q}$.

7. Determinar o corpo de decomposição do polinômio $x^4 - x^2 + 1$ e o seu grau sobre $\mathbb{Q}$.

8. Determine o corpo de decomposição do polinômio $(x^2-2)(x^2-3)(x^2+1)$, o seu grau sobre $\mathbb{Q}$ e uma base deste corpo de decomposição sobre $\mathbb{Q}$.

9. Verifique-se o polinômio x^5+3x^3-9x-6 é irredutível sobre $K[x]$, onde $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{5}, i)$.

10. Sejam $n \geq 1$, inteiro positivo. Considere $\zeta_n = cos(\frac{2\pi}{n}) + isen(\frac{2\pi}{n})$, raiz $n-$ésima da unidade. Mostre que o corpo de decomposição do polinômio x^3-2 sobre $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$. Mostre também que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) \neq \mathbb{Q}(\zeta_3^j \sqrt[3]{2}), j = 0, 1, 2$.

11. Determinar um elemento primitivo u para as extensões abaixo e as respectivas dimensões $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$:
    (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$
    (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$
    (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-2})$
    (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{8}, 3 + \sqrt{50})$

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \beta)$, onde β é tal que $\beta^4 + 6\beta + 2 = 0$.

12. Seja F corpo de característica $p > 0$, e seja $a \in F$ tal que o polinômio $f(x) = x^p - x - a$ não possua nenhuma raiz em F. Seja K/F o corpo de decomposição de $f(x)$.

    (a) Seja $\alpha \in K$ uma raiz de $f(x)$. Mostre que $\alpha + k$ é uma raiz de $f(x)$ para todo $k \in \mathbb{F}_p$.

    (b) Mostre que toda raiz de $f(x)$ em K possui o mesmo grau sobre F.

    (c) Deduza que $f(x)$ é irredutível sobre F, $K = F(\alpha)$, e $[K : F] = p$..

13. Seja F corpo de característica $p > 0$ e seja $f(x) \in F[x]$ polinômio de grau p. Se K o corpo de decomposição de $f(x)$, possui grau np sobre F, onde $n \geq 1$, então $f(x)$ é irredutível sobre F. Adicionalmente, se $n > 1$ então $f(x)$ é separável também.

14. Seja L/K extensão de corpos e seja $\tau \in L$ elemento transcendente sobre K. Mostre que:

    (a) τ é algébrico sobre $K(\alpha)$, para qualquer $\alpha \in K(\tau) \setminus K$.

    (b) K é algebricamente fechado em $K(\tau)$.

15. Seja L corpo de decomposição do polinômio $x^3 - 5$ sobre $\mathbb{Q}$. Verifique se a afirmação seguinte é verdadeira ou não: $i = \sqrt{-1} \in L$.

16. (a) Verifique se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, justificando: π^2 é algébrico sobre $\mathbb{Q}$.

    (b) Mostre que $\pi^2 \notin \mathbb{Q}(\pi^3)$.

    (c) Mostre que π^2 é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\pi^3)$. Determine o polinômio minimal de π^2 sobre $\mathbb{Q}(\pi^3)$ e o grau de π^2 sobre $\mathbb{Q}(\pi^3)$.

17. Determine todos os homomorfismos de L em $\mathbb{C}$, para cada um dos seguintes corpos L:

    (a) $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{2})$; $\mathbb{Q}(\zeta_n)$; $\mathbb{Q}(\tau)$, sendo τ transcendente sobre $\mathbb{Q}$; $\mathbb{F}_p = \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, p inteiro primo.

    (b) Quais destes homomorfismos aplicam L em $\mathbb{R}$?

(c) Quais desses homomorfismos são endo-(respectivamente, auto-)morfismos de L?

18. L/K extensão de corpos, definimos $Aut_K(L) = \{\sigma : L \to L \mid \sigma$ automorfismo, $\sigma(a) = a, \forall a \in K\}$. Mostre que se $f(x) \in K[x]$ e $\alpha \in L$ é uma raiz de $f(x)$ em L então $\sigma(\alpha)$ também é uma raiz de $f(x)$ em L.

19. Prove que a extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ é normal sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é normal sobre $\mathbb{Q}$, mas $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ não é normal sobre $\mathbb{Q}$.

20. Dê exemplo de uma extensão finita F/K que não é simples.

21. Verifique se as extensões a seguir são normais ou não.

    (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$

    (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

    (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$

    (d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \zeta_3)$.

    (e) $\mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{7}})$

    (f) $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$

22. Seja K corpo, L subcorpo de K contendo o conjunto $\{a^2 \mid a \in K\}$.

    (a) Mostre que se a característica de K é diferente de 2 então $L = K$.

    (b) Mostre que K é um corpo finito de característica 2 então $L = K$.

    (c) Mostre que os resultados do ítem anterior não valem se K for um corpo infinito de característica 2.

23. (a) Seja K corpo de característica $p > 0$. Mostre que o polinômio $t^p - t - c$ em $K[t]$ é ou irredutível sobre K ou ele se decompõem completamente como produto de p fatores lineares distintos sobre K. (Dica: Mostre que se u é raiz de $t^p - t - c$ então $u + 1$ também uma raiz desse polinômio).

    (b) Seja F o corpo de decomposição do polinômio $t^{62} - 1$ sobre $\mathbb{F}_5$. Mostre que $[F : \mathbb{F}_5] = 3$.

24. Seja F corpo finito e suponha que o subcorpo de F gerado por $\{x^3 \mid x \in F\}$ é diferente de F. Mostre que F possui cardinalidade 4.

25. Mostre que nenhum corpo finito F de característica ímpar é algebricamente fechado.