Lista 4 - Teoria Aritmética dos Números

1. Verifique se o conjunto é um ideal de $\mathbb{Z}$. Em caso afirmativo, determine o inteiro positivo m tal que $m\mathbb{Z}$ é o ideal.

   (a) Todos os inteiros x, tais que alguma potência de x é divisível por 64;

   (b) Todos os inteiros x, tais que $x|24$;

   (c) Todos os inteiros x, tais que $6|x$ e $24|x^2$.

2. Verifique se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove-a, caso contrário dê um contra-exemplo.

   (a) $mdc(a, 1) = 1$;

   (b) $mdc(a, b + c) = mdc(a, b) + mdc(a, c)$;

   (c) $mdc(a, a) = |a|$;

   (d) $mdc(a, bc) = b \cdot mdc(a, c)$;

   (e) $b|a \Leftrightarrow mdc(a, b) = |b|$;

   (f) Se existem $r, s \in \mathbb{Z}$, tais que $d = ar + bs$ então $d = mdc(a, b)$;

   (g) Se existem $r, s \in \mathbb{Z}$, tais que $1 = ar + bs$ então $1 = mdc(a, b)$;

3. Sejam a e b inteiros tais que $mdc(a, b) = 1$. Prove que:

   (a) $mdc(a + b, a - b) = 1$ ou 2;

   (b) $mdc(a + b, ab) = 1$.

4. Sejam a um inteiro, n um inteiro positivo e $d = mdc(a, a + n)$. Prove que $d|n$.

5. Sejam a e b inteiros relativamente primos. Prove que $mdc(ac, b) = mdc(c, b)$.

6. Seja n um inteiro. Prove que:

   (a) $mdc(n, 2n + 1) = 1$;

   (b) $mdc(n + 1, n^2 + n + 1) = 1$.

7. Para cada par de inteiros a e b dados abaixo, calcule $mdc(a, b) = d$ e determine inteiros r e s tais que $d = ar + bs$:

   (a) 637 e 3887;

   (b) 7325 e 8485;

   (c) 648 e 1218;

   (d) 551 e 874;

8. Sejam a, b e c inteiros. Prove que se $a|b$ e $mdc(b, c) = 1$ então $mdc(a, c) = 1$.

9. Determine um múltiplo de 19 e um múltiplo de 17 cuja diferença seja 5.

10. Para cada par de inteiros a e b abaixo, calcule $m = mmc(a, b)$.

    (a) 637 e 3887;

    (b) 7325 e 8485;

    (c) 648 e 1218;

    (d) 551 e 874;

11. Dado $n \in \mathbb{Z}$ calcule

    (a) $mmc(n, n + 1)$

    (b) $mmc(2n, 2n + 2)$

12. Determine os inteiros a e b tais que $ab = 9900$ e $mmc(a, b) = 330$.

13. Determine todos os inteiros positivos a e b tais que $mmc(a, b) = 72$ e $mdc(a, b) = 36$.

14. Sejam dados a e b inteiros não nulos. Prove que:

    (a) $mdc(a, b) = mmc(a, b) \Leftrightarrow |a| = |b|$.;

    (b) $mmc(ka, kb) = |k| \cdot mmc(a, b)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.;

    (c) Se $k|a$ e $k|b$ então $mmc(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}) = \frac{mmc(a,b)}{|k|}$.;