Lista 9 - Teoria Aritmética dos Números

1. Prove por indução que para todo inteiro $n \geq 4$, $n! > 2^n$.
2. Prove por indução que para todo inteiro $n \geq 4$, $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) > 2^{n+2}$.
3. Prove por indução que para todo inteiro $n \geq 1$, $8 \mid 3^{2n} - 1$.
4. Prove por indução que para todo inteiro $n \geq 1$, $12 \mid 3^n + 7^{n-1} + 8$.
5. Prove por indução que para todo inteiro $n \geq 1$, $5 \mid 3^{3n+1} + 2^{n+1}$.
6. (a) Determine o resto na divisão de 2^{50} por 7.
   (b) Determine o resto na divisão de 41^{65} por 7.
   (c) Determine o resto na divisão de $1^5 + 2^5 + \cdots + 100^5$ por 4.
7. Determine todos os primos positivos p tais que $p^2 + 2$ é primo.
8. Sejam a, b inteiros relativamente primos.
   (a) Mostre que $mdc(a+b, a) = 1$ e $mdc(a+b, b) = 1$.
   (b) Mostre que $mdc(a \pm b, ab) = 1$.
   (c) Mostre que $mdc(a+b, a-b) = 1$ ou 2.
   (d) Mostre que $mdc(a+b, a^2+ab+b^2) = 1$.
   (e) Mostre que $mdc(a+b, a^2-ab+b^2) = 1$ ou 3.
   (f) Mostre que $mdc(2a+b, a+2b) = 1$ ou 3.
   (g) Mostre que $mdc(a+b, a^2+b^2) = 1$ ou 2.
   (h) Mostre que $mdc(a^2, b^2) = 1$.
9. Sejam a, b inteiros. Mostre que são equivalentes:
   (a) $mdc(a, b) = 1$.
   (b) $mdc(a^2+b^2, a^2+2ab) = 1$ ou 5.
10. Determine uma expressão para a soma

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

e demonstre a validade da mesma por indução para todo inteiro positivo $n \geq 1$.

(Dica: Denote por S a soma acima. Utilize S e a soma na ordem inversa para calcular $2S$).

11. Mostre que as seguintes expressões são válidas:

    (a) $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$, para todo inteiro $n \geq 1$.

    (b) $(x^n + y^n) = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$, para todo inteiro ímpar.

12. Sejam a, n, m inteiros positivos, $m > n$. Mostre que $mdc(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) = 1$, se a é par, ou 2 se a é ímpar.

13. Prove que existem infinitos inteiros primos da forma $4n + 3$.

14. Sejam a, b, m, n inteiros positivos, com $a > b$. Seja $d = mdc(a, b)$. Prove que

    (a) $mdc(a^m - 1, a^n - 1) = a^d - 1$.

    (b) $mdc(\frac{a^n - b^n}{a - b}, a - b) = mdc(n \cdot d^{n-1}, a - b)$.

15. Mostre que nenhum inteiro primo da forma $4n + 3$ pode ser expresso como soma de dois quadrados.

16. Verifique em cada caso, se a equação diofantina linear possui solução inteira ou não. Em caso afirmativo, obtenha todas as soluções da mesma.

    (a) $97x + 35y = 13$.

    (b) $15x + 21y = 261$.

    (c) $2173x + 2491y = 159$.

17. Determine o resto na divisão de:

    (a) 16^{53} por 7. (Resposta: 4)

    (b) 3^{247} por 5. (Resposta: 11)

18. Determine os dois últimos dígitos na representação decimal do inteiro 9^{9^9}.

19. Determine o dígito das unidades na representação decimal do inteiro $1997^{1998^{1999}}$.

20. Determine os dois últimos dígitos na representação decimal do inteiro 3^{3434}.

21. Mostre que $11 \cdot 14^n + 1$ é um inteiro composto, para todo inteiro positivo n.

A seqüência de Fibonacci (F_n) é a seqüência definida pelas relações: $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$. Cada um dos números da seqüência de Fibonacci é denominado um número de Fibonacci.

22. (a) Determine uma expressão para a soma dos n primeiros termos da seqüência de Fibonacci e demonstre a mesma por indução.

    (b) Prove que:

    i. $F_n = 2F_{n-2} + F_{n-3}, n \geq 4$.

    ii. F_{5n} é divisível por 5, $n \geq 1$.

    iii. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.

    iv. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$.

    (c) i. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine uma expressão para A^n, $n \geq 1$ e demonstre a validade da mesma por indução.

    ii. Deduza a fórmula de Cassini: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$. (Dica: Seja A matriz quadrada com entrada reais então $det(A^n) = [det(A)]^n$, onde $det(A)$ denota o determinante da matriz A).

    (d) $mdc(F_n, F_{n+1}) = 1, n \geq 1$.

Números da forma $f_n = 2^{2^n} + 1$ foram estudados por Pierre de Fermat e são chamados de Números de Fermat. Os primeiros números de Fermat são $f_0 = 3, f_1 = 5, f_2 = 17, f_3 = 257, f_4 = 65537$.

23. (a) Seja f_n o $n-$ésimo número de Fermat. Mostre que $f_n = f_{n-1}^2 - 2f_{n-1} + 2$, onde $n \geq 1$.

    (b) Mostre que $f_0 f_1 f_2 \cdots f_{n-1} = f_n - 2, n \geq 1$.

(c) Sejam m, n inteiros não negativos, distintos. Mostre que nesse caso, $mdc(f_n, f_m) = 1$.

24. Determine o resto na divisão de 24^{1947} por 17 (Resposta: 14)

25. Determine os inteiros primos p tais que $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ seja um quadrado.

26. Determine o resto na divisão de 245^{1040} por 18 (Resposta: 13)

27. Verifique se os conjuntos I abaixo são ideais de $\mathbb{Z}$. Em caso afirmativo, obtenha m inteiro, $m \geq 0$ tal que $I = m\mathbb{Z}$.

    (a) Todos os inteiros n tais que $21n$ seja divisível por 9.

28. Resolva a congruência linear $17x \equiv 9 \pmod{276}$.

29. Mostre que $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ é um inteiro, para todo inteiro positivo n.

30. Mostre que se $2^n + 1$ é um inteiro primo então $n = 0$ ou n é uma potência de 2.

31. Seja n inteiro. Mostre que se o último dígito de n^2 (em representação decimal) é 5 então os dois últimos dígitos de n^2 são 25. (em representação decimal).

32. Mostre que os dois últimos dígitos na representação decimal do quadrado de um inteiro não podem ser ímpares.