Lista 1 - Teoria Aritmética dos Números

1. Mostre as seguintes fórmulas por indução:

   (a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

   (c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (d) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

2. Prove que o número de diagonais de um polígono de n lados é $\frac{n(n-3)}{2}$.

3. Prove que:

   (a) $n! > n^2$, para todo $n \geq 4$.

   (b) $n < 2^n$, para todo $n \geq 1$.

4. Seja a um inteiro positivo. Prove que $(1 + a)^n > 1 + na$, para todo $n \geq 2$.

5. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira prove-a, caso contrário dê um contra-exemplo.

   (a) $(mn)! = m!n!$, para todo $m, n \geq 1$.

   (b) $(m + n)! = m! + n!$ para todo $m, n \geq 1$.

   (c) $n! > n^3$, para todo $n \geq 6$.

   (d) $n < 2^n$ para todo $n?1$.

6. Para $n \geq 1$ prove que:

   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ se e somente se n é um inteiro ímpar e $k = \frac{1}{2}(n - 1)$.

   (b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ se e somente se $0 \leq k < \frac{1}{2}(n - 1)$.

7. Para $n \geq 1$ prove as identidades seguintes:

   (a) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$

   (b) $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$

   (c) $n \cdot 2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

8. Determine o coeficiente numérico de maior valor absoluto no desenvolvimento de $(4x - 5y)^{14}$.

9. No desenvolvimento de $(2x^2 - \frac{1}{x^8})^{20}$ determinar:

   (a) o termo central.

   (b) o coeficiente do termo em x^{20}, se existe, e o termo simétrico.

   (c) se existem termos em x^8, x^6 e x^{-5}.

10. No desenvolvimento do binômio $(x^p + \frac{1}{ax^2})^n$ o termo central é de grau 3 em x e o simétrico de T_3 é $T_5 = \frac{5}{256}x^8$. Determinar a, pe n.

    (T_i indica o termo que ocupa o lugar i no desenvolvimento do binômio, ou seja, o correspondente ao índice $i - 1$ na somatória).

11. Dada a recorrência $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ com $a_0 = 1$. Ache uma fórmula para a_n.

12. Dada a recorrência $a_n = a_{n-1} + n$ onde $a_0 = 1$. Ache uma expressão para a_n.