P1 - FVV - Prof. Edson Iwaki - 12/03/2015

Nome:

1. Com relação a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{4x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

   (a) f é contínua em $(0,0)$?

   (b) f admite derivadas parciais em $(0,0)$? Em caso afirmativo, determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   (c) As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$?

   (d) f admite derivadas direcionais em $(0,0)$?

   (e) f é diferenciável em $(0,0)$?

   (f) f admite plano tangente em $(0,0)$? Determine-o.

2. Defina quando uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto (x_0, y_0, z_0).

3. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, que satisfaz $v\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} = \sqrt{2}, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calcule a derivada direcional de f na direção do vetor $\vec{a} = (1,1)$, num ponto genérico (x,y), onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x,y) = g(x^2+y^2, x+y)$.

Theorem 0.1 *(Regra da Cadeia) Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções. Seja $z = f(u,v)$, com $u = g(x,y), v = h(x,y)$. Se f, g e h forem diferenciáveis, então:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

GABARITO P1.

Q1. Seja $f(x,y)$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{4x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) f é contínua em $(0,0)$?

sim.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{0}{x} \cdot \underset{\text{pq?}}{\overset{\text{limitada}}{\left(\frac{x^2}{4x^2+y^2}\right)}} + \overset{0}{y} \cdot \underset{\text{pq?}}{\overset{\text{limitada}}{\left(\frac{y^2}{4x^2+y^2}\right)}} = 0 = f(0,0)$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$; f é contínua em $(0,0)$.

b) f admite derivadas parciais em $(0,0)$? sim.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - \overset{=0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{h^3}{4h^2}\right)}{h} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - \overset{=0}{f(0,0)}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\left(\frac{k^3}{k^2}\right)}{k} = 1.$$

(c) As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2(4x^2+y^2) - (x^3+y^3)\,8x}{(4x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2(4x^2+y^2) - (x^3+y^3)\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas, $\forall (x,y) \neq (0,0)$, pois são quocientes de funções polinomiais e, portanto são contínuas.

- Devemos verificar se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2(4x^2+y^2) - (x^3+y^3)\,8x}{(4x^2+y^2)^2}$$

Considere $\gamma_1(t) = (0,t)$ e $\gamma_2(t) = (t,t)$.

e $\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t)) = 0$ e $\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2(4t^2+t^2)-(t^3+t^3)\,8t}{(4t^2+t^2)^2} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{15t^4 - 16t^4}{25t^4} = -\frac{1}{25}$$

Seja $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

Então $\lim_{t\to 0} g(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to 0} g(\gamma_2(t))$

$\therefore$ Não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

$\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$!

(d) f admite derivadas direcionais em (0,0)?

Seja $\vec{u} = (h,k)$, $\vec{u}$ vetor unitário

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th, tk) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{h^3+k^3}{4h^2+k^2} = \frac{h^3+k^3}{4h^2+k^2}$$

e) f é diferenciável em (0,0)?

Solução 1)

Suponha f diferenciável em (0,0).
então f admite derivada direcional em (0,0)
na direção do vetor $\underset{(h,k)}{\underset{\shortparallel}{\vec{u}}}$, $\forall \vec{u}$ unitário. e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot \vec{u}. \quad \text{Mas } \nabla f(0,0)\cdot\vec{u} = \overset{1b}{\left(\frac{1}{4}, 1\right)}\cdot(h,k) = \frac{h}{4} + k$$

$$\neq \frac{h^3+k^3}{4h^2+k^2} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0).$$

Contradição.

∴ f não é diferenciável em (0,0).

Solução 2)

f é diferenciável em (0,0)

$\Updownarrow$

(**) $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$ e

onde $E(h,k) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k$.

e

(*) $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}$ existe

01) f NÃO.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{1}{4}h - 1k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3+k^3}{4h^2+k^2} - \frac{1}{4}h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dots =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-\frac{1}{4}k^2h - 4h^2k}{(4h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} .$$

$$\shortparallel$$

$$g(h,k)$$

$g(h,k)$

Sejam $\gamma_1(t) = (0,t)$ e $\gamma_2(t) = (t,t)$

$$\lim_{t\to 0} g(\gamma_1(t)) = 0 \,/\!/ .$$

$$\lim_{t\to 0^+} g(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} g(t,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{4}t^3 - 4t^3}{5t^2\sqrt{2t^2}} = \dots = \frac{-\frac{17}{4}}{5\sqrt{2}} \neq 0.$$

Como $\lim_{t\to 0} g(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to 0} g(\gamma_2(t))$

concluímos que <u>não</u> existe $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}$

$\therefore$ f não é diferenciável em $(0,0)$.

02) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto (x_0, y_0, z_0)

se: existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que o limite

$$\lim_{(h,k,l)\to(0,0,0)} \frac{E(h,k,l)}{\|(h,k,l)\|} \text{ existe e é igual a zero;}$$

onde $E(h,k,l) = f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) - f(x_0, y_0, z_0) - ah - bk - cl$

03) $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável

$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ (versor de $\vec{u}$), $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x,y) = ?$

$$(x,y) \mapsto (\underbrace{x^2+y^2}_{u}, \underbrace{x+y}_{v}) \xrightarrow{g} g(x^2+y^2, x+y) = f(x,y)$$

$$u = x^2+y^2, \quad v = x+y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{w} \Rightarrow (A)\ \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$\Uparrow$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 1$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y)\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

$$= 2\left(v\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) = 2\sqrt{2}, \text{ com } \begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = x+y \end{cases}$$

Substituindo em (A): $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x,y) = 2, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$