Álgebra Aplicada - Mestrado em Matemática Aplicada - UFABC - Prof. Edson Iwaki.

Nome:
Data: 11/04/2011

1. Seja $A = \mathbb{Z}[X]$ e $I = 2\mathbb{Z}[X] + X\mathbb{Z}[X]$.
   (a) Mostre que A não é um domínio de ideais principais.
   (b) Seja $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, a função definida por $\varphi(f) = \overline{f(0)}$. Prove que φ é homomorfismo de anéis.
   (c) Mostre que $Ker(\varphi) = I$.
   (d) I é ideal maximal? Por quê?
2. Prove ou dê contraexemplo. Justifique todas as suas respostas.
   (a) Existe um corpo K e um subanel L de K tais que L não é subcorpo de K.
   (b) $n\mathbb{Z}$ possui divisores do zero se n não é primo.
   (c) Todo domínio de característica zero é infinito.
   (d) Todo domínio de característica positiva é finito.
   (e) Seja R anel, I ideal de R. Se R não possui identidade então o anel quociente R/I não possui identidade.
   (f) Existe um anel R que possui algum elemento $r \in R$ de modo que r não é nem divisor do zero e r não é inversível em R.
3. Verifique se os polinômios abaixo são ou não irredutíveis em $\mathbb{Q}[X]$. Em cada caso justifique enunciando o critério utilizado.
   (a) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$
   (b) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 3$
   (c) $f(x) = 11x^7 - 210x^5 + 21x^4 - 14x^3 + 77x^2 - 91x - 175$
4. Seja K corpo. Prove que, para uma álgebra $A = \mathbb{H}_K(a, b)$ de quatérnions generalizados sobre K, as seguintes condições são equivalentes:
   (a) A é um álgebra com divisão.
   (b) Para todo elemento não nulo $\alpha \in A$, temos que $n(\alpha) \neq 0$.
   (c) A equação $x^2 = ay^2 + bz^2$ possui somente a solução trivial em K.
5. Seja $p > 1$ um inteiro primo e seja A o anel $A = \frac{\mathbb{Z}}{p^6\mathbb{Z}}$.
   (a) Ache TODOS os ideais de A e os ordene por inclusão.
   (b) Determine os ideais maximais de A.
6. Seja G um grupo finito e $\Phi \in Aut(G)$ um automorfismo que leva mais do que $\frac{3}{4}$ dos elementos de G em seus inversos. Mostre que G é abeliano e que $\Phi(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$.