Lista de Exercícios - 2 - Extensões Algébricas - Entrega: 11/03/2020: **Não serão aceitos exercícios entregues fora do prazo ou com atraso. Todos os exercícios devem ser resolvidos de forma manuscrita. Não serão aceitos exercícios digitados.**

Recorde que $\mathbb{F}_p = \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ denota o corpo finito com p elementos.

1. Determine um corpo de decomposição L/K para cada um dos polinômios abaixo e determine $[L : K]$:
   (a) $f(x) = x^8 - 81, K = \mathbb{Q}$;
   (b) $f(x) = x^3 - x + 1, K = \mathbb{F}_3$;
   (c) $f(x) = x^3 - x + 1, K = \mathbb{F}_5$;

2. Verifique quais dos seguintes polinômios são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$:
   (a) $x^4 + x^2 + 1$;
   (b) $x^4 + 4$;
   (c) $x^{12} + 99$;
   (d) $x^3 + 2x + 1$;

3. (a) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ não são corpos isomorfos.
   (b) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$ e $\mathbb{Q}(\pi)$ são corpos isomorfos (você pode utilizar o fato de que π é um elemento transcendente sobre $\mathbb{Q}$)
   (c) Mostre que $\mathbb{F}_{11}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{F}_{11}(\sqrt{7})$ são isomorfos.

4. (a) Sejam p, q inteiros primos positivos distintos.
   Mostre que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{q})$.
   (b) Determine $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}(\sqrt{p})]$ e $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}) : \mathbb{Q}]$.
   (c) Sejam $p_1 = 2, p_2 = 3, \cdots, p_n, \cdots$, os inteiros primos positivos ordenados naturalmente. Mostre que para todo inteiro positivo $k \geq 1$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{p_k}) : \mathbb{Q}] = 2^k$.
   (d) Conclua do ítem anterior que a extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \cdots, \sqrt{p_n}, \cdots)$ é uma extensão algébrica infinita de $\mathbb{Q}$.