Lista de Exercícios - 3 - Extensões Algébricas - Entrega: 18/03/2020:
Não serão aceitos exercícios entregues fora do prazo ou com atraso. Todos os exercícios devem ser resolvidos de forma manuscrita. Não serão aceitos exercícios digitados.

1. Seja L/K extensão de corpos. Prove que L/K será algébrica se e somente se todo anel entre K e L for um corpo.

2. Qualquer corpo Z com a propriedade que $K \subseteq Z \subseteq L$ é chamado de corpo intermediário da extensão de corpos L/K.

   Seja L/K extensão de corpos finita. Mostre que são equivalentes:

   (a) L/K é uma extensão simples.

   (b) A extensão L/K possui um número finito de corpos intermediários distintos entre K e L.

3. Seja $K \subseteq L, \tau \in L$, sendo τ transcendente sobre K, prove que τ é algébrico sobre $K(\alpha)$ para qualquer $\alpha \in K(\tau) \setminus K$.

4. Seja L/K extensão algébrica. Prove que:

   (a) K será perfeito se e somente se L for perfeito e L/K for separável.

   (b) Supondo que L/K seja finita, K será perfeito se e somente se L for perfeito.

   (c) Indique um corpo imperfeito (i.e., K não é perfeito) e uma extensão algébrica L/K tal que L seja perfeito.

5. Seja K corpo infinito de característica $p > 0$ e suponha $L = K(u, v)$ com $u^p \in K, v^p \in K$ e $[L : K] = p^2$. Mostre que existe um número infinito de corpos intermediários distintos entre K e L.

   (Um exemplo explícito desta condição seria tomando $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ e $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p), \mathbb{F}_p$ corpo finito com p elementos. Observe também que o exercício permite: (i) construir extensões finitas que não possuem elemento primitivo! e (ii) L/K é uma extensão não separável finita!)