

Questões da 2ª avaliação de MA 12 — 2018

1. (0.5) Considere o conjunto de todos os números naturais com quatro algarismos tais que os algarismos lidos da esquerda para a direita estão em ordem estritamente decrescente. Quantos elementos possui tal conjunto?
2. (1.0) Será formada uma fila com h homens e m mulheres, onde $h \geq 2$ e $m \geq 1$.
 - (a) Quantas filas distintas poderão ser formadas, tendo um homem no final da fila?
 - (b) Quantas filas distintas poderão ser formadas tendo um homem no final da fila e um homem na primeira posição da fila?

3. (1.5) Sejam n e p inteiros positivos com $n \geq p$. Prove que

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Considere a sequência (a_n) definida por

$$a_n = \begin{cases} \binom{2}{2} & \text{se } n = 1 \\ \sum_{i=2}^{n+1} \binom{i}{2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Prove que para todo natural n vale $a_n = \binom{n+2}{3}$.

4. (2.0) De quantas maneiras podemos distribuir r bolas idênticas em n caixas numeradas de modo que exatamente m caixas fiquem vazias?
5. (2.0) Escolha um dos dois exercícios abaixo para resolver usando recorrência (formule a recorrência e resolva-a).
 - 5.1. Uma escada tem $n \geq 1$ degraus. Em cada passo você sobe um ou dois degraus. De quantas maneiras diferentes você pode subir toda a escada?
 - 5.2. O salário de Carmelino no mês n é $S_n = a + bn$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. Ele poupa anualmente $1/p$ de sua renda e investe sua poupança a juros mensais de taxa i . Determine a renda de Carmelino no mês n .

6. (1.0) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R\$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e as deduções:
- (a) Poupança: rendimento mensal de 0,56% e isento de imposto de renda e de qualquer outra taxa;
 - (b) CDB: rendimento mensal de 0,86%, 4% de imposto de renda e 1% de taxa administrativa, ambos incidem sobre a remuneração.

Qual é a aplicação mais vantajosa ao final do mês?

7. (1.0) Para comprar um carro são oferecidos dois planos.
- (a) pague o valor integral somente um mês após a compra.
 - (b) divida o valor integral em três prestações mensais iguais, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual é a melhor opção? Para decidir a melhor opção é necessário conhecer a taxa de juros cobrada pela loja? conhecer a taxa de juros cobrada pela loja?

Para a próxima aula: (0.5) A sequência (f_n) dos *números de Fermat* é definida recursivamente por:

$$f_0 = 3; f_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} f_k \quad (n \geq 1).$$

Por exemplo, 3, 5, 17, 257 são os quatro primeiros números de Fermat. Prove que $f_n = 2^{2^n} + 1$ para todo $n \geq 0$.

Para a outra aula, seguinte a próxima: (0.5) Denotemos por A, B e C subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Determine a quantidade de ternas ordenadas (A, B, C) que satisfazem a propriedade

$$A \cap B \subseteq C.$$