Questões da 3ª avaliação de MA 12 — 2018

1. (1.0) Em um grupo há 30 homens, cuja altura média é 1,75m, e 10 mulheres, cuja altura média é 1,67m. Qual é a altura média do grupo?

$$\frac{30 \cdot 1,75 + 10 \cdot 1,67}{40} = 1,73$$

2. (2.0) Nos dois problemas abaixo você pode usar os resultados dos exercícios da P2 sem justificativa.

(a) Será formada uma fila com h homens e m mulheres, onde $h \geqslant 2$ e $m \geqslant 1$. Supondo que todas as filas são igualmente prováveis

(i) Com que probabilidade uma fila formada ao acaso tem um homem no final?

$$\frac{h(h+m-1)!}{(h+m)!} = \frac{h}{h+m}$$

(ii) Dado que a fila termina com um homem, com que probabilidade a fila começa com um homem?

$$\frac{\frac{h(h-1)(h+m-2)!}{(h+m)!}}{\frac{h}{h+m}} = \frac{h-1}{h+m-1}$$

(b) Se distribuímos ao acaso r bolas idênticas em n caixas numeradas com que probabilidade exatamente m caixas ficam vazias?

$$\frac{\binom{n}{m} \cdot \binom{r-1}{n-m-1}}{\binom{n+r-1}{r}}$$

3. (2.0) Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y, z.

(a) Use a desigualdade das médias para provar que se o volume da caixa é 32 então sua área total é pelo menos 48.

$$\mathrm{A} = 2yz + 2zx + xy \qquad \mathrm{V} = xyz$$

$$\frac{\mathrm{A}}{3} \geq \sqrt[3]{4xyz} \Rightarrow \mathrm{A} \geq 3\sqrt[3]{4xyz} = 48$$

(b) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima e volume 32.

$$2yz = 2zx = xy \Rightarrow x = y = 4,\ z = 2$$

4. (2.0) Numa fila de cinema há 20 pessoas das quais 10 têm somente notas de \$5,00 e 10 somente notas de \$10,00. O ingresso custa \$5,00 e a bilheteria começa sem nenhuma nota para troco. Se todas as filas com essas pessoas são igualmente prováveis, qual a probabilidade de que a bilheteria não fique sem troco em nenhum momento?

$$\frac{\binom{20}{10} - \binom{20}{11}}{\binom{20}{10}} = \frac{1}{11}$$

5. (2.1) Consideremos três urnas, digamos A, B e C. Na urna A temos três bolas pretas e três bolas vermelhas; na urna B temos duas bolas pretas e quatro vermelhas; na urna C todas as bolas são pretas. Uma urna é escolhida ao acaso, cada uma com a mesma probabilidade de ser escolhida, 1/3. Em seguida, uma bola é tirada ao acaso da urna escolhida, cada bola com a mesma probabilidade de ser escolhida, 1/6. Observamos a cor dessa bola. Calcule as probabilidades

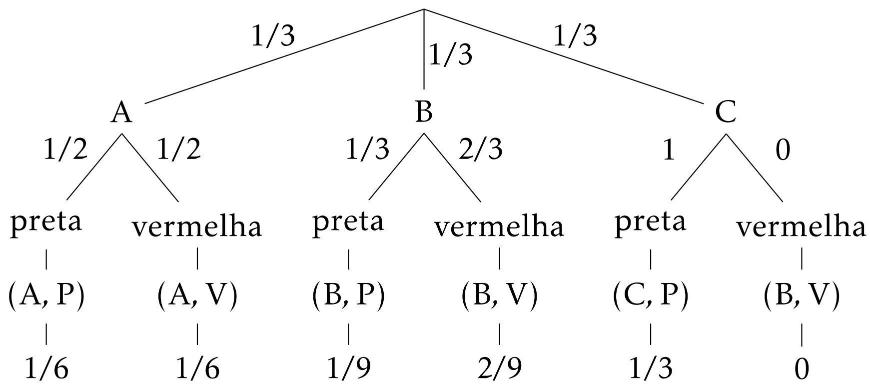

Figura 1. diagrama de árvore.

(a) condicional $\mathbb{P}(\,A \mid P\,)$ de ter escolhido a urna A dado que saiu um bola preta;
(b) condicional $\mathbb{P}(\,P \mid B\,)$ de ter saído uma bola preta dado que foi escolhida a urna B;
(c) a probabilidade $\mathbb{P}(P)$ de ter saído um bola preta.

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(A \cap P) + \mathbb{P}(B \cap P) + \mathbb{P}(C \cap P) = \frac{11}{18}.$$

$$\mathbb{P}(\,A \mid P\,) = \frac{\mathbb{P}(A \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{1/6}{11/18} = \frac{3}{11}$$

$$\mathbb{P}(\,P \mid B\,) = \frac{\mathbb{P}(P \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}$$