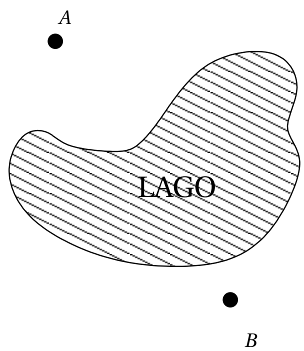
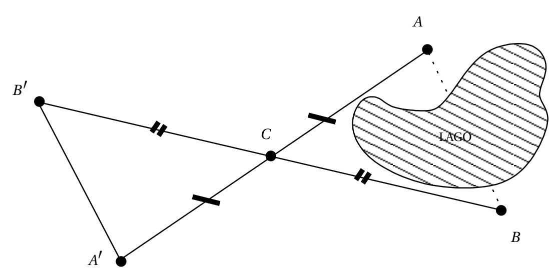
Questões da 1ª avaliação de MA 13 – Geometria, 2016

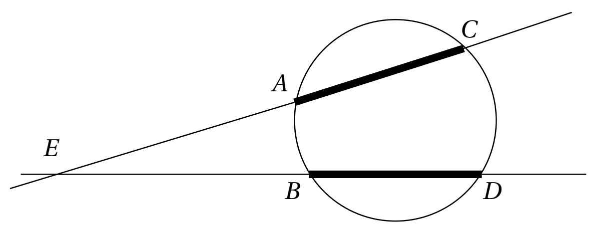
1. A região na figura abaixo representa um lago. Descreva um processo pelo qual será possível medir a distância entre os pontos A e B (só medição fora do lago é possível e é possível traçar retas não paralelas que passam em A e em B, respec., `e não passam pelo lago`).



Tome duas retas r e s que passam por A e B respectivamente, não passam pelo lago e que concorrem em C. Tome A' em r mas não em $\overrightarrow{CA}$ e tome B' em s mas não em $\overrightarrow{CB}$ tais que $\overline{CB'} = \overline{CB}$ e $\overline{CA'} = \overline{CA}$. Então $ABC \equiv A'B'C$ por LAL e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Logo, basta medir $A'B'$.



2. Um ângulo **excêntrico exterior** (ou **ângulo secante**) é o ângulo formado pelas retas suportes de duas cordas que se encontram no exterior de um círculo.

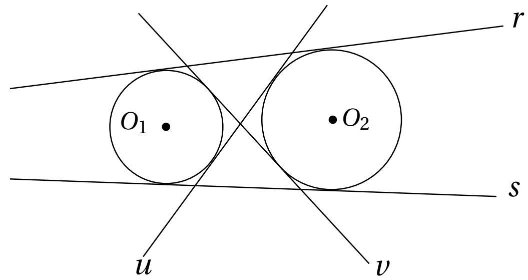


(a) Seja $\angle AEB$ o ângulo excêntrico exterior definido pelas cordas AC e BD. Demonstre que

$$A\widehat{E}B = \frac{|\widehat{AB} - \widehat{CD}|}{2}$$

$C\widehat{A}D$ é externo em EAD, portanto $C\widehat{A}D = \widehat{E} + A\widehat{D}B$ donde $\widehat{E} = C\widehat{A}D - A\widehat{D}B = \frac{1}{2}\widehat{CD} - \frac{1}{2}\widehat{AB}$

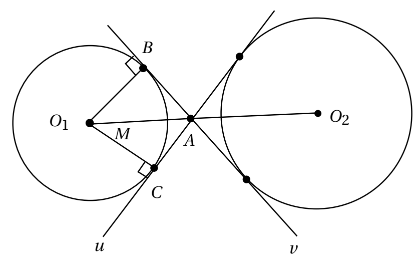
3. Na figura abaixo as retas são tangentes comuns aos dois círculos.



Prove que u e v se encontram na reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ que passa pelos centros dos círculos. Também, prove que se os raios dos dois círculos são diferentes, as retas r e s também se encontram na reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.

Considere

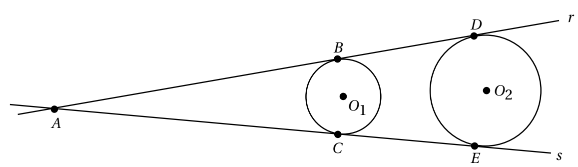
$$\{B\} = v \cap \Gamma_1(O_1, R_1),\ \{C\} = u \cap \Gamma_1(O_1, R_1),\ \{A\} = u \cap v$$



Como B e C são pontos de tangência $O_1B \perp v$ e $O_1C \perp u$ e, por CH, temos $O_1BA \equiv O_1CA$, portanto, $B\widehat{A}O_1 = C\widehat{A}O_1$, de modo que $\overrightarrow{AO_1}$ é bissetriz de $B\widehat{A}C$.

Usando de mesmo raciocínio para o outro círculo deduzimos que $\overrightarrow{AO_2}$ é bissetriz do ângulo oposto no vértice A de modo que as bissetrizes são semirretas opostas, portanto, os pontos $A,\ O_1,\ O_2$ são colineares.

O segundo resultado é mostrado de modo análogo, se os raios são diferentes, r e s concorrem em A



$\overrightarrow{AO_1}$ e $\overrightarrow{AO_2}$ são bissetrizes do mesmo ângulo de modo que $A,\ O_1,\ O_2$ são colineares.

Em ambos os casos as retas tangentes se encontram na reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ que passa pelos centros dos círculos.

4. Seja n um inteiro positivo maior ou igual a 3. Prove que num polígono convexo com n lados o comprimento de cada lado é menor que a soma dos comprimentos dos $n-1$ lados restantes.

A prova é por indução em n.
Base: Para $n = 3$ a afirmação do exercício é a desigualdade triangular.
Hipótese da indução: Dado $n > 3$, suponha que a afirmação seja válida para todo polígono convexo com n lados.
Passo: Seja $A_1A_2\dots A_nA_{n+1}$ um polígono convexo com $n+1$ lados.
Usando a diagonal A_nA_1 temos que $A_1A_2\dots A_n$ é um polígono convexo com n lados, portanto, pela hipótese indutiva temos os 5 seguintes fatos

(1) $$\overline{A_iA_{i+1}} < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{i-1}A_i} + \overline{A_{i+1}A_{i+2}} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1}$$

para todo $i = 1,2,\dots,n-1$ e

(2) $$\overline{A_nA_1} < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{i-1}A_i} + \overline{A_iA_{i+1}} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n}$$

Também

(3) $$\overline{A_nA_1} < \overline{A_nA_{n+1}} + \overline{A_{n+1}A_1}$$
(4) $$\overline{A_nA_{n+1}} < \overline{A_1A_{n+1}} + \overline{A_nA_1}$$
(5) $$\overline{A_{n+1}A_1} < \overline{A_nA_{n+1}} + \overline{A_nA_1}$$

portanto de (1) e (3)

$$\overline{A_iA_{i+1}} < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{i-1}A_i} + \overline{A_{i+1}A_{i+2}} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_{n+1}} + \overline{A_{n+1}A_1}$$

para todo $i = 1,2,\dots,n-1$; de (4) e (2)

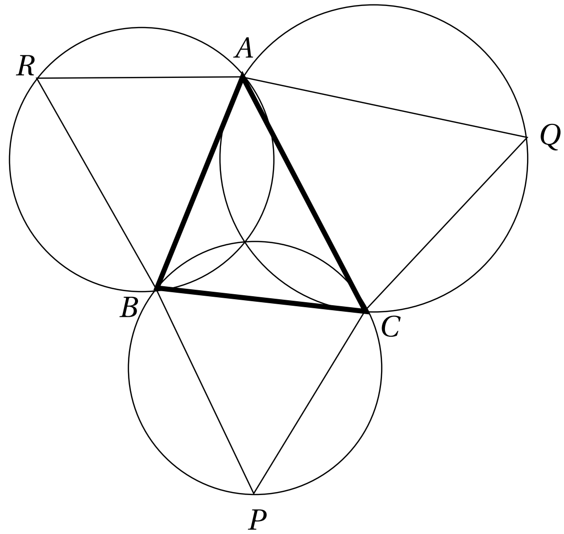
$$\overline{A_nA_{n+1}} < \overline{A_1A_{n+1}} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{i-1}A_i} + \overline{A_iA_{i+1}} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n}$$

finalmente, de (5) e (2)

$$\overline{A_{n+1}A_1} < \overline{A_nA_{n+1}} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{i-1}A_i} + \overline{A_iA_{i+1}} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n}$$

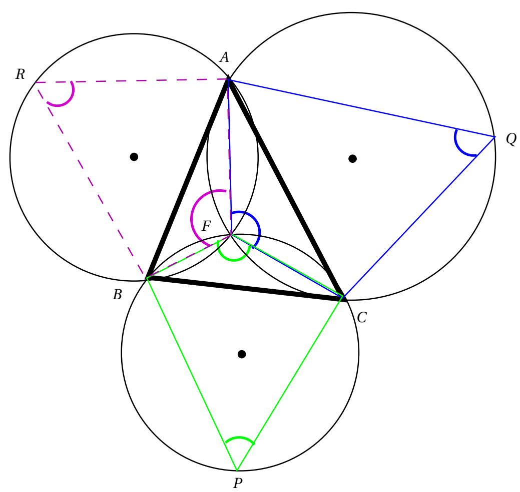
de modo que todo lado de $A_1A_2\dots A_nA_{n+1}$ é menor que a soma dos outros n lados restantes.

5. Sobre cada lado de um triângulo ABC construímos um triângulo de modo que a soma dos ângulos nos vértices novos, denomindados P, Q e R, seja 180º ($\widehat{P}+\widehat{Q}+\widehat{R}=180$ž).



(a) Prove que os círculos circunscritos dos triângulos ABR, ACQ e BCP têm um ponto em comum.

Seja F o segundo ponto de interseção dos círculos circunscritos de ACQ e BCP.
$B\widehat{F}C+\widehat{P}=180°$ pois $BPCF$ é um quadrilátero inscritível. Analogamente $A\widehat{F}C+\widehat{P}=180$º.



De $B\widehat{F}C+\widehat{P}=180°$, $A\widehat{F}C+\widehat{P}=180$º e de $\widehat{P}+\widehat{Q}+\widehat{R}=180$º temos $A\widehat{F}B+\widehat{R}=180°$ portanto RAFB é um quadrilátero inscritível logo F está no círculo circunscrito de RAB, ou seja, F é ponto comum dos três círculos circunscritos.

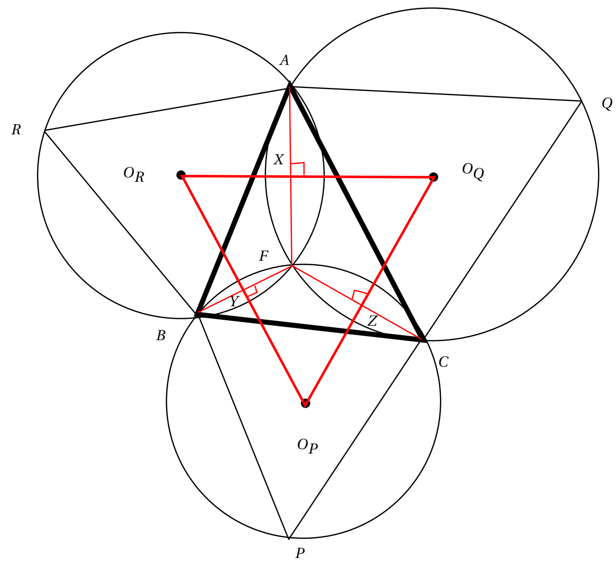
(b) O **teorema de Napoleão** (geralmente atribuído a Napoleão Bonaparte, que o teria enunciado em 1787) afirma que se os triângulos ABR, ACQ e BCP criados sobre os lados de ABC de acordo com o processo acima são equiláteros então os baricêntros dos triângulos ABR, ACQ e BCP são vértices de um triângulo equilátero.

Deduza de (a) o teorema de Napoleão.

Suponha que e os triângulos ABR, ACQ e BCP são equiláteros. Assim, os circuncentros coincidem com os baricentros.
Seja F o ponto comum aos círculos dado em (a). Como $\widehat{P} = \widehat{Q} = \widehat{R} = 60^o$ temos

$$A\widehat{F}C = A\widehat{F}B = B\widehat{F}C = 120^o$$

Sejam O_R, O_P e O_Q os centros dos círculos que circunscrevem RBA, BCP e QAC respectivamente.



Os círculos de centro O_R e O_Q se encontram em A e F, portanto $AF \perp O_RO_Q$ e tais segmentos concorrem em X.

Analogamente, $O_RO_P \perp BF$ concorrem em Y e $O_PO_Q \perp CF$ concorrem em Z.

No quadrilátero convexo O_QXFZ os ângulos internos somam 360º portanto $\widehat{O_Q} = 60^o$

De modo análogo, $\widehat{O_P} = \widehat{O_R} = 60^o$. Portanto $O_PO_QO_R$ é equilátero.

6. **Bônus** Prove que os círculos $\Gamma_1(O_1, R_1)$ e $\Gamma_2(O_2, R_2)$ se encontram se, e só se,

$$|R_2 - R_1| \leqslant \overline{O_1O_2} \leqslant R_1 + R_2.$$