14.1 Problems

Esta unidade será dedicada à resolução de uma lista de problemas sobre a matéria até agora desenvolvida.

1. Se p e q são números primos $p \geq q \geq 5$, então $24 \mid p^2 - q^2$.
2. Todo primo da forma $3n + 1$ é também da forma $6m + 1$.
3. Mostre que o único número primo da forma $n^3 - 1$ é 7.
4. O único número primo n tal que $3n + 1$ é um quadrado é 5.
5. Seja $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$. Mostre que
   (a) Se k divide $a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_r - 1$, então k divide $a_1 a_2 \cdots a_r - 1$.
   (b) Se $n > 0$, então existe um primo p tal que $k \nmid (p-1)$ e $p \mid (nk-1)$.
   (c) Existem infinitos primos p tais que $k \nmid (p - 1)$.
6. Mostre que existe uma correspondência biunívoca entre pares de primos gêmeos e números n tais que $n^2 - 1$ possui quatro divisores.
7. Mostre que o produto dos divisores de um inteiro positivo n é $n^{s/2}$, onde s é o número de divisores de n.
8. Prove que, se r é o número de fatores primos distintos de $n \in \mathbb{N}^*$, o número de modos em que n pode ser fatorado como produto de dois números relativamente primos é 2^{r-1}.
9. Seja $n > 2$. Mostre que entre n e $n!$ existe pelo menos um número primo.
10. Mostre que se $p, p + 2$ e $p + 4$ são primos, então $p = 3$.
11. (a) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ de paridade distinta. Mostre que $3|a^m - a^n$.
    (b) Seja $p > 3$ um número primo. Mostre que $a^p - a$ e $a^p b - b^p a$ são divisíveis por $6p$, para todos $a, \in \mathbb{N}$, com $a > b$.
12. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $(a, b) = 1$, e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 2 = p$ é um número primo. Mostre que o mdc de $a + b$ e $a^2 - nab + b^2$ deve ser 1 ou p.

13. Seja p um número primo ímpar. Mostre que pode-se escrever $p = y^2 - x^2$, com $x, y \in \mathbb{N}$, de modo único.

14. Sejam $a, b, n, m \in \mathbb{N}^*$ e suponha que $a^n + b^m$ seja um número primo. Mostre que $(n, m) = 1$, ou $(n, m) = 2^r$, para algum $r \in \mathbb{N}$.