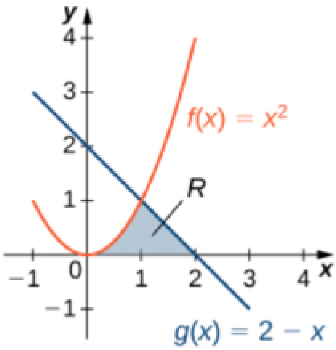
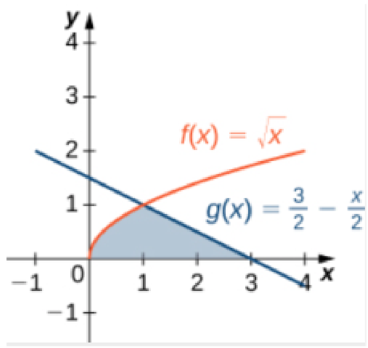
Exercícios da aula 11

1. Calcule a área da região compreendida pelos eixos Ox, Oy, pela reta definida por $x = 1$ e pelo gráfico da função $f(x) = 1/(1 + x^2)$.
2. Encontre a área da região entre as curvas R definida nas figuras abaixo



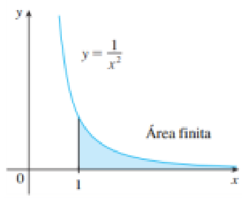


3. Calcule a área da região delimitada pela curva $y = \frac{1}{x}$, pelo eixo Ox e as retas $y = x$ e $x = 4$.
4. Defina $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, ou seja, a função logaritmo natural $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fica definida como a primitiva da função $\frac{1}{x}$, para $x > 0$, com a condição $\ln(1) = 0$.

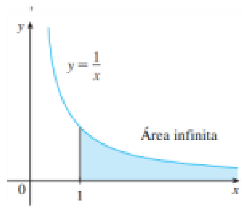
   Use a regra da derivada de função inversa para calcular a derivada da função $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, inversa de $\ln(x)$.
5. Seja $f(x) = 1 + \int_0^{2x} \cos(t^2) dt$. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto de abscissa 0.
6. **Integral imprópria** Se f é integrável em $[a, x]$ para todo $x \geq a$, a integral imprópria de f no intervalo $[a, +\infty)$ é $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ quando o limite existe.

   Por exemplo,

   $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$



   Entretanto $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \ln(b) = +\infty.$



Prove que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \pi.$