Exercícios da aula 4

1. Determine se são assíntotas
   a) a reta $x = 2$ para $f(x) = -2/(x-2)^2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $a = 2$.
   b) a reta $x = 1$ para $f(x) = 1/(x-1)^3$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $a = 1$.
   c) a reta$x = 2$ para $f(x) = -2/(x-2)^2$ se $x < 2$, $f(2) = 0$ e $f(x) = 1/(2-x)^3$ se $x > 2$, $a = 2$.

2. Calcule os seguintes limites:
   a) $\lim_{x \to -\infty} 2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$
   b) $\lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{2}{x^3}$
   c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + 9x}{4x^5 - 50x^3}$
   d) $\lim_{x \to +\infty} 2x^7 + 500xx^8 + 1$
   e) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - 8}$
   f) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3 - 7}}$.

3. Mostre que a função definida em toda reta por $f(0) = 0$ e se $x \neq 0$ então $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ é contínua.

4. Uma função $f \colon I \to \mathbb{R}$ é dita **lipschitziana** quando existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ positiva e tal que

$$| \ f(y) – f(x) \ | \leq k \cdot |y – x|$$

para todo $x, y \in I$. Mostre que se f é lipschitiziana então f é contínua.

5. Use o exercício anterior para provar que
   a) $f(x) = |x|$ é contínua;
   b) para todo $a > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua no intervalo $[\frac{a}{2}, +\infty)$;
   c) as funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são contínuas.