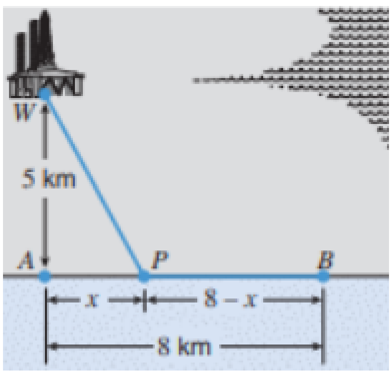
Exercícios da aula 9

1. Seja $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x$, então $f'(x) = 4x^3 + 4x - 3$. Use o Teorema de Rolle para mostrar que a equação $4x^3 + 4x - 3 = 0$ possui pelo menos uma solução no intervalo (0, 1).
2. Mostre que:
   - um polinômio de grau 2 tem, no máximo, 2 raízes reais;
   - um polinômio de grau 3 tem, no máximo, 3 raízes reais;
   - um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.
3. Verifique se cada uma das funções abaixo, definidas no intervalo $[a, b]$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio. Caso afirmativo, determine um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.
   - $f(x) = |x - 2|$, $[a, b] = [0, 4]$.
   - $f(x) = \begin{cases} (x-1)^{-1} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ para $[a, b] = [0, 2]$.
4. Demonstre que $\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}$. (*Dica*: Use o TVM com $f(x) = \ln(x)/x$, $x \in [\mathrm{e}, \pi]$).
5. Determine a função f definida para todo $x > 0$ e tal que $f'(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ com $f(1) = 0$.
6. Determine o ponto da reta $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ que está mais próximo da origem.
7. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Determine o ângulo que vai maximi-zar a quantidade de água que a calha pode conter. (Modele o problema e depois resolva-o. Não basta calcular o máximo e o mínimo: deve-se justificar os cálculos; em todos os problemas de otimização.).
8. Determine a área do maior retângulo com lados paralelos aos eixos x e y que pode ser inscrito na elipse $\mathcal{E}$ dada por $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ $(a, b > 0)$.
9. A Figura mostra um poço de petróleo no mar em um ponto W a 5 km do ponto A mais próximo de uma praia reta. O petróleo é bombeado de W até um ponto B na praia a 8 km de A da seguinte forma: de W até um ponto P na praia entre A e B através de uma tubulação colocada sob a água, e de P até B através de uma tubulação colocada ao longo da praia. Se o custo para colocar a tubulação for de $1.000.000/km sob a água e de $500.000/km por terra, onde deve estar localizado P para minimizar o custo de colocar a tubulação?



10. Se você encaixar o maior cone circular reto possível dentro de uma esfera, que fração do volume da esfera será ocupada pelo cone?