Prova Sub de Álgebra Linear — 2014-1
Jair

A prova é individual e sem consulta. Durante a prova é **proibido** *usar qualquer objeto que não seja lápis ou lapiseira, borracha e caneta (leia-se: não pode usar celular). Será levado em conta para a correção dos exercícios:* clareza *na redação das respostas* , corretude *do desenvolvimento das respostas, o* rigor *nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aulas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.*

Exercício 1. O que é base de um espaço vetorial? O que é dimensão de um espaço vetorial?

Determine a dimensão e uma base do autoespaço associado ao autovalor 1 da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Exercício 2. O que é um operador linear? O que é o núcleo de um operador linear?

Seja T um operador linear em V e [T] sua representação matricial em alguma base de V.

Prove que os autovetores da matriz [T] associados ao autovalor λ são os vetores não nulos no núcleo do operador representado pela matriz $\lambda \mathrm{Id} - [\mathrm{T}]$.

Prove que λ é uma autovalor de [T] se e só se $\lambda \mathrm{Id} - [\mathrm{T}]$ não representa uma bijeção.

□

Exercício 3. O que é o subespaço de V gerado por U? Seja T um operador linear sobre V; o que significa "U é invariante para T"?

Lembremos a definição de soma direta: Se $\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_m$ são subespaços de V então $\mathrm{V} = \mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{U}_m$ se todo $\vec{v} \in \mathrm{V}$ pode ser escrito *de maneira única* como $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_m$ com $\vec{u}_i \in \mathrm{U}_i$ para todo i.

Por exemplo, suponha que

$$\text{V tem uma base B de autovetores de T} \tag{1}$$

então, cada vetor $\vec{v}$ é escrito de maneira única como combinação linear dos vetores da base B:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n.$$

Assim, pondo $\mathrm{U}_i = [\{\vec{v}_i\}]$ (o subespaço gerado pelo autovetor $\vec{v}_i$) para todo i, concluímos que todo $\vec{v}$ é escrito de maneira única como $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_m$, pois basta fazer $\vec{u}_i = a_i\vec{v}_i \in \mathrm{U}_i$ para todo i. Portanto

$$\mathrm{V} = \mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{U}_m, \text{ além disso, } \dim \mathrm{U}_i = 1 \text{ e } \mathrm{U}_i \text{ é invariante para T (para todo } i) \tag{2}$$

No parágrafo acima foi provado que (1) ⇒ (2). Prove que (2) ⇒ (1), isto é, prove que se V é a soma direta de subespaços invariantes de dimensão 1 então V tem uma base de autovetores.

□