1ª Prova de Álgebra Linear — 2014-1
Jair

A prova é individual e sem consulta. Durante a prova é ***proibido*** *usar qualquer objeto que não seja lápis ou lapiseira, borracha e caneta (leia-se: não pode usar celular). Será levado em conta para a correção dos exercícios:* clareza *na redação das respostas ,* corretude *do desenvolvimento das respostas, o* rigor *nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aulas. Respostas sem justificativas não serão consideradas. Os exercícios 6 e 7 devem ser entregues na 2a.-feira as 10h, no início da aula*

Exercício 1. Considere o conjunto $V = \mathbb{R}^2$ com as seguintes operações de soma e multiplicação por escalar:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/x \\ b \end{pmatrix}$$

$a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Por quê V não é um espaço vetorial?

A multiplicação por escalar não está definida para o escalar 0, portanto não é espaço vetorial.

Exercício 2. Mostre que $\{1-x, 1-x^3, (1-x)^2, 1\}$ é uma base o espaço dos polinômios de grau menor igual a 3.

que é gerador:

$$\alpha(1-x) + \beta(1-x^3) + \gamma(1-x)^2 + \delta = ax^3 + bx^2 + cx + d \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta &= d \\ -\alpha - 2\gamma &= c \\ -\gamma &= b \\ -\beta &= a \end{cases}$$

portanto $\alpha = 2b - c$, $\beta = -a$, $\gamma = -b$, $\delta = d - b + c + a$.

que é LI:

$$\alpha(1-x) + \beta(1-x^3) + \gamma(1-x)^2 + \delta = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta &= 0 \\ -\alpha - 2\gamma &= 0 \\ -\gamma &= 0 \\ -\beta &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

Exercício 3. Considere U o espaço vetorial dado pelo conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, com a soma e a multiplicação usuais.

Considere V o espaço vetorial dado pelo conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, com a soma e a multiplicação usuais.

Se o corpo dos escalares é $\mathbb{Q}$, U é subespaço de V?

sim:

1. $0 \in U$
2. $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$
3. $\alpha \in \mathbb{Q},\ x \in U \Rightarrow \alpha x \in U$

Se o corpo dos escalares é $\mathbb{R}$, U é subespaço de V?

não: a multiplicação por escalar não é fechada
$\alpha \in \mathbb{R},\ x \in U \not\Rightarrow \alpha x \in U$
para $\alpha = \pi$, por exemplo, $\alpha x \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 4. A transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

é linear?

não: se T fosse linear então deveria valer $T(\vec{0}) = \vec{0}$, mas $T\binom{0}{0} = \binom{\sin(0)}{\cos(0)} = \binom{0}{1} \neq \binom{0}{0}$.

Exercício 5. Seja $T\colon V \to U$ uma transformação linear. Responda um dos itens abaixo.

1. A imagem de T é subespaço de U?
2. $\{\vec{v} \in V\colon T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ é subespaço de V?

sim em ambos os casos. A resolução foi feita em sala em 07/04