1ª Prova de Álgebra Linear — 2016-1

> ☛ *Durante a prova é **proibido** usar qualquer objeto (como celular e calculadora) que não seja lápis ou lapiseira, borracha e caneta. Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade. **Respostas sem justificativas não serão consideradas**.*

***Exercício* 1.** Determine condições envolvendo a, b, e c para que o sistema abaixo tenha solução. É possível que tal sistema tenha solução única?

$$\begin{cases} x \quad\;\; + \;\; z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$$

***Exercício* 2.** Complete o conjunto de vetores $B = \{x^3 + x, x^2 + x^3, x^2 + x^4\}$ para uma base do espaço de polinômios com grau máximo quatro e tais que $p(0) = 0$.

***Exercício* 3.** Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V.

(a) $U \cap W$ é subespaço de V?

(b) $U \cup W$ é subespaço de V?

(c) O conjunto de todos os vetores de V que podem ser escritos como soma de um vetor em U com um vetor em W
$$U + W = \{\vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U \text{ e } \vec{w} \in W\}$$
é subespaço de V?

***Exercício* 4.** Vimos em aula como interpretar linhas e colunas de uma matriz com entradas reais como vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^\ell$ para algum natural ℓ.

(a) Considere as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
e escreva as colunas de $A \cdot B$ como combinação linear das colunas de A.

(b) Faça o caso geral: Sejam $A \in M_{n\times k}$ e $B \in M_{k\times m}$. Mostre que as colunas de $A \cdot B$ são combinações lineares das colunas de A.

(c) Sejam $A \in M_{n\times k}$ e $B \in M_{k\times m}$. Mostre que as linhas de $A \cdot B$ são combinações lineares das linhas de B.