2ª Prova de Álgebra Linear — 2014-1
Jair

A prova é individual e sem consulta. Durante a prova é **proibido** *usar qualquer objeto que não seja lápis ou lapiseira, borracha e caneta (leia-se: não pode usar celular). Será levado em conta para a correção dos exercícios:* clareza *na redação das respostas* , corretude *do desenvolvimento das respostas, o* rigor *nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aulas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.*

Exercício 1. Para o operador linear dado por $T(\vec{v}) = \vec{v}$ descreva as matrizes $[T]_B^B$ e $[T]_B^C$, em que B e C são bases.

Se $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ então

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \cdots + 0\vec{b}_i + \cdots + 0\vec{b}_n \\
&\vdots \\
\vec{b}_i &= 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \cdots + 1\vec{b}_i + \cdots + 0\vec{b}_n \\
&\vdots \\
\vec{b}_n &= 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \cdots + 0\vec{b}_i + \cdots + 1\vec{b}_n
\end{aligned}$$

portanto $[T]_B^B$ é a matriz identidade e $[T]_B^C = [\mathrm{id}]_B^C [T]_B^B = [\mathrm{id}]_B^C$ é a matriz mudança de base, de B para C.

Exercício 2. Mostre que se $T\colon V \to U$ é tal que $\dim(U) = \dim(V) = \mathrm{posto}(T)$ então T é bijetora.

$\mathrm{posto}(T) = \dim(\mathrm{Im}T)$ e $\mathrm{posto}(T) = \dim(U)$ logo $\dim(\mathrm{Im}T) = \dim(U)$ portanto uma base de $\mathrm{Im}(T)$ é base de U, donde tiramos que T é sobrejetora.
$\mathrm{posto}(T) + \mathrm{nulidade}(T) = \dim(V)$, portanto $\mathrm{nulidade}(T) = 0$ donde tiramos que T é injetora.

Exercício 3. O determinante $\det\colon M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear?

Para um escalar c e uma matriz A, a matriz cA é obtida por n aplicações da operacão elementar sobre linha $\vec{\ell}_i \leftarrow c\vec{\ell}_i$ (uma vez para cada i), portanto, $\det(cA) = c^n \det(A)$. Em particular, $\det(A + A) = \det(2A) = 2^n \det(A)$. Assim, para $n > 1$ não é transformação linear. (Para $n = 1$ é.)

Exercício 4. Defina um operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e a imagem seja a reta $y = 2x$.

O núcleo é gerado por $\binom{1}{1}$ e a imagem por $\binom{1}{2}$. Notemos que esses dois vetores são LI, portanto geram o $\mathbb{R}^2$. Como T fica unicamente determinada por seus valores na base fazemos

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

De $\binom{a}{b} = (2a-b)\binom{1}{1} + (b-a)\binom{1}{2}$ deduzimos

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} &= T\left((2a-b)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = T\left((2a-b)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + T\left((b-a)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \\ &= (2a-b)T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (b-a)T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (b-a)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}b-a\\2(b-a)\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercício 5. Sejam $B = \left(\binom{1}{1}, \binom{2}{3}\right)$ e $C = \left(\binom{-1}{2}, \binom{-2}{1}\right)$ duas bases do $\mathbb{R}^2$. Exiba a matriz de mudança de base, da base B para a base C. Quais as coordenadas do vetor $\binom{2}{3}$ em cada uma das bases? Seja T o operador linear dado por $[T]_B^B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$. Determine $[T]_C^C$ e $[T]_B^C$.

$[\mathrm{id}]_B^C = \left(\left[\binom{1}{1}\right]_C \quad \left[\binom{2}{3}\right]_C\right) = \begin{pmatrix}1 & 8/3\\-1 & -7/3\end{pmatrix}$,
$[\binom{2}{3}]_B = \binom{0}{1}$,
$[\binom{2}{3}]_C = [\mathrm{id}]_B^C[\binom{2}{3}]_B = \binom{8/3}{-7/3}$,
$[\mathrm{id}]_C^B = \begin{pmatrix}1 & 8/3\\-1 & -7/3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-7 & -8\\3 & 3\end{pmatrix}$
$[T]_C^C = [\mathrm{id}]_B^C[T]_B^B[\mathrm{id}]_C^B = \begin{pmatrix}1 & 8/3\\-1 & -7/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -8\\3 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & 0\\0 & -35\end{pmatrix}$
$[T]_B^C = [\mathrm{id}]_B^C[T]_B^B[\mathrm{id}]_B^B = \begin{pmatrix}1 & 8/3\\-1 & -7/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -35/3\end{pmatrix}$