2ª Prova de Álgebra Linear — 2016-1

> ☛ *Durante a prova é **proibido** usar qualquer objeto (como celular e calculadora) que não seja lápis ou lapiseira, borracha e caneta. Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade. **Respostas sem justificativas não serão consideradas**.*

Exercício 1. Prove que para toda transformação linear T vale que $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$.

Exercício 2. Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$.
O que é o posto de T?
Qual é a relação entre o posto de T e o posto da matriz $[T]_A^B$ que representa T.

Exercício 3. Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$ não nula. Mostre que se $\dim(V) = 1$ então T é sobrejetora.

Exercício 4. Use o exercício anterior para provar que se $a_1, \ldots, a_n$ são números reais não todos nulos então $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ tem dimensão $n - 1$.

Os próximos exercícios usam a seguinte definição.
Definição: Seja $T \in \mathcal{L}(U, U)$. Definimos as potências T^n de T como

$$\begin{aligned} T^0 &= \mathrm{Id} \\ T^n &= T \circ T^{n-1} \text{ para todo } n > 0 \end{aligned}$$

para todo n natural. Por exemplo, $T^1 = T$, $T^2 = T \circ T$, $T^3 = T \circ T \circ T$, e assim por diante.

Exercício 5. Mostre que T^2 é a transformação linear nula se, e somente se, $\mathrm{Im}(T) \subset \ker(T)$.

Exercício 6. Seja $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ uma base ordenada de U. Sejam T e S transformações em $\mathcal{L}(U, U)$ tais que

1. $T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3, T(\vec{b}_2) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2, T(\vec{b}_3) = \vec{b}_2 + \vec{b}_3$ e
2. $S(\vec{b}_1) = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2, S(\vec{b}_2) = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 - \vec{b}_3, S(\vec{b}_3) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$.

Determine as matrizes $[T]_B^B$, $[S]_B^B$, $[S \circ T^2]_B^B$ e $[S]_{T(B)}^B$ se $T(B)$ é a base ordenada $(T(\vec{b}_1), T(\vec{b}_2), T(\vec{b}_3))$.