Álgebra Linear

Professor: `jair.donadelli@ufabc.edu.br`

página da disciplina na web:
`http://professor.ufabc.edu.br/~jair.donadelli/algelin.html`

Universidade Federal do ABC

Sumário I

Sumário II

- Dependência linear
- Base e dimensão

Sumário III

Sumário IV

- Autovalor e autovetor de um operador linear
- Polinômio característico
- Autovalor, autovetor e polinômio característico de uma matriz
- Diagonalização

Motivação

Google é um grande consumidor de álgebra linear:

Aplicações

MIT Technology Review

NEWS & ANALYSIS | FEATURES | VIEWS | MULTIMEDIA | DISCUSSIONS | TOPICS | POPULAR: GLASS, DARKLY | RECHARGEABLE FUEL

VIEW

20 COMMENTS

Emerging Technology From the arXiv
September 25, 2013

How Google Converted Language Translation Into a Problem of Vector Space Mathematics

To translate one language into another, find the linear transformation that maps one to the other. Simple, say a team of Google engineers

Aplicações

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

AMS subject classifications. 15-01, 15A18, 15A51

Exemplo: Navegação

Problema: estimar posição e velocidade de um veículo viajando ao longo de uma estrada.

A posição é medida (com erro) 10 vezes por segundo ($T = 0, 1$).

x – estado do sistema (velocidade,posição) – não observado diretamente
u – aceleração dada pelo motorista
y – posição observada

Exemplo: Navegação de um veículo

$$\text{velocidade: } v_{t+1} = v_t + Tu_t + \tilde{v}_t \tag{1}$$

$$\text{posição: } p_{t+1} = p_t + Tv_t + \frac{1}{2}T^2 u_t + \tilde{p}_t \tag{2}$$

$$\text{estado: } x_t = \begin{pmatrix} p_t \\ v_t \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_{t+1} & = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{pmatrix} u_t + \tilde{w}_t \\ y_t & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_t + \tilde{z}_t \end{cases}$$

Filtro de Kalman

2010 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation

A Linear Algebraic Approach to Kalman Filtering

Yiping Cheng
Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China
ypcheng@ustc.edu

***Abstract*—A new linear algebraic approach is used here to derive the celebrated Kalman filter. The filtering problem is first converted into an equivalent linear algebraic problem by relating the estimate of process state to the vector of measured output via a linear equation. Then we obtain the Kalman recursion equations by using a simple linear algebraic lemma. This derivation is conceptually simple, elegant, and thus very suitable for pedagogical purposes. Another advantage of our approach is that the noise correlated case is dealt with as easily as the noise uncorrelated case.**

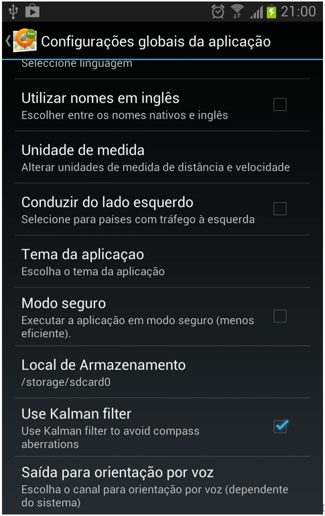
noise, and output signals; the n_ξ-dimensional vector ξ and each w_k are random vectors satisfying

$$\xi \sim N(0, I), \tag{4}$$

$$w_k \sim N(0, I) \text{ for all } k \geq 0, \tag{5}$$

$$\xi \text{ and all } w_k (k \geq 0) \text{ are mutually independent.} \tag{6}$$

Filtro de Kalman no aplicativo para GPS do *smartphone*



mais navegação

A seguinte equação é um modelo extremamente simplificado do comoportamento de um *Boeing 707-321* voando a uma velocidade $80ms^{-1}$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0.04600 & 0.10681 & 0.00000 & -0.17122 \\ -0.16759 & -0.51500 & 1.00000 & 0.00642 \\ 0.15431 & -0.54795 & -0.90600 & -0.00152 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.16023 & 0.00211 \\ 0.00820 & -0.03025 \\ 0.09174 & -0.75283 \\ 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)\,.$$

No modelo acima, $\mathbf{x}(t)$ corresponde aos *estados internos*, $\mathbf{u}(t)$ aos controles do piloto e $\mathbf{y}(t)$ aos *observáveis*, descritos na tabela abaixo:

$x_1 = y_1$	$x_1 + 80ms^{-1}$ é o módulo do vetor Velocidade em relação ao ar.
x_2	Ângulo do eixo do avião com o vetor velocidade.
x_3	Velocidade ângular de arfagem
$x_4 = y_2$	Ângulo de arfagem (eixo do avião, em relação ao plano horizontal)
u_1	Impulso do motor
u_2	Ângulo do Profundor

Esse modelo foi obtido de uma demonstração do *Octave*. Vamos inicialmente esquecer os controles e observáveis, e investigar a estabilidade do avião.

Sistema Linear

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Sistema Linear — forma matricial

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Sistema Linear — forma matricial

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sistema Linear — forma matricial

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

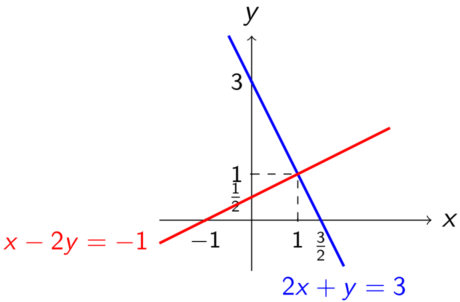
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistema Linear — visto pelas linhas

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Sistema Linear — visto pelas linhas

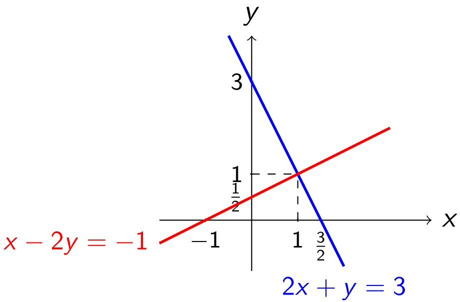
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$



Sistema Linear — visto pelas linhas

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$y = 3 - 2x$$
$$x - 2(3 - 2x) = -1$$
$$x = 1$$
$$y = 3 - 2x = 1$$



Sistema Linear — visto pelas colunas

$$\begin{cases} 2x + 1y & = 3 \\ 1x - 2y & = -1 \end{cases}$$

Sistema Linear — visto pelas colunas

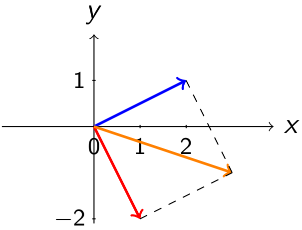
$$\begin{cases} 2x + 1y & = 3 \\ 1x - 2y & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sistema Linear — visto pelas colunas

$$\begin{cases} 2x + 1y &= 3 \\ 1x - 2y &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Operações com matrizes

A é uma matriz com m linhas e n colunas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

B é uma matriz com m linhas e n colunas

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

$$(A\ m \times n)(B\ n \times p) = (C\ m \times p)$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \color{red}{a_{i,1}} & \color{red}{a_{i,2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{i,n}} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & \color{red}{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & \color{red}{b_{2,j}} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \color{red}{\vdots} & \ldots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & \color{red}{b_{n,j}} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & c_{i,j} & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,p} \end{pmatrix}, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Operações com matrizes

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \cdots & \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \cdots & \alpha a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha a_{m,1} & \alpha a_{m,2} & \cdots & \alpha a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$A - B = A + (-1)B$$

Inversa e Identidade

matriz inversa A^{-1}, **quando existe**, é uma matriz tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa e Identidade

matriz inversa A^{-1}, **quando existe**, é uma matriz tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

matriz identidade

Operações com matrizes – ilustração

Imagens são representadas em computador por matrizes.

Soma de matrizes:

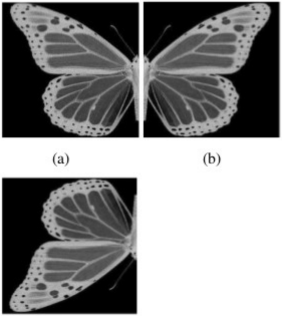
(a)

(b)

(c)

Operações com matrizes – ilustração

Multiplicação de matrizes:



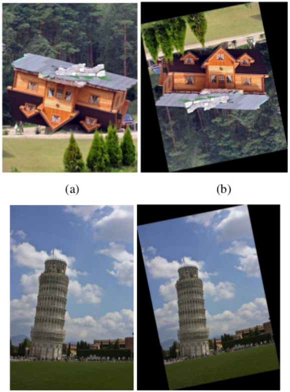
(a) (b) (c)

(a) A

(b) $A\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} A$

Operações com matrizes – ilustração



(a) (b) (c) (d)

$$\text{Rotação } R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) imagem original

(b) (a) rodado $\theta = \pi - \pi/16$

(c) imagem original

(d) (c) rodado $\theta = -\pi/16$

§1. Espaços vetoriais

Espaço Vetorial Real

$$(\mathcal{V}, \oplus, \odot)$$

$\mathcal{V}$ um conjunto não vazio cujos elementos são *vetores*

$\oplus$ uma soma de vetores

$\odot$ um produto de vetor por escalar (número real)

formam um *espaço vetorial real* se valem os seguintes axiomas

Axiomas

EV1 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V};\ \vec{u} \oplus \vec{v} \in \mathcal{V}$

EV2 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \odot \vec{u} \in \mathcal{V}$

EV3 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V};\ \vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$

EV4 $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V};\ \vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w}$

EV5 $\exists \vec{0} \in \mathcal{V}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V};\ \vec{u} \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{u} = \vec{u}$

EV6 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \exists \vec{w} \in \mathcal{V};\ \vec{u} \oplus \vec{w} = \vec{w} \oplus \vec{u} = \vec{0}$

EV7 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha \odot (\beta \odot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{u}$

EV8 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \odot (\vec{v} \oplus \vec{u}) = (\alpha \odot \vec{v}) \oplus (\alpha \odot \vec{u})$

EV9 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ (\alpha + \beta) \odot \vec{u} = (\alpha \odot \vec{u}) \oplus (\beta \odot \vec{u})$

EV10 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V};\ 1 \odot \vec{u} = \vec{u}$

Consequências dos axiomas

Teorema (1)

Se $(\mathcal{V}, \oplus, \odot)$ *é um espaço vetorial real então para quaisquer* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ *e quaisquer* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$;
2. $0 \odot \vec{v} = \vec{0}$;
3. *o vetor oposto a* $\vec{v}$ *é unico;*
4. $(-\alpha) \odot \vec{v} = \alpha \odot (-\vec{v}) = -(\alpha \odot \vec{v})$;
5. $\alpha \odot \vec{0} = \vec{0}$;
6. *há um único* $\vec{w}$ *tal que* $\vec{v} + \oplus \vec{w} = \vec{u}$.

Subespaços Vetoriais

Exercício (2)

Dado um espaço vetorial $(\mathcal{V}, \oplus, \odot)$ *e* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *não vazio tal que*

SV1 $\forall \vec{u},\ \vec{v} \in \mathcal{U}$ *vale* $\vec{u} \oplus \vec{v}$;

SV2 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \mathcal{U}$ *vale* $\alpha \odot \vec{u} \in U$;

então $(\mathcal{U}, \oplus, \odot)$ *é espaço vetorial?*

Subespaços Vetoriais

Dado um espaço vetorial $(\mathcal{V}, \oplus, \odot)$ um sobconjunto $\mathcal{U} \subset V$ não vazio é um **subespaço** (vetorial) de $\mathcal{V}$ se $\mathcal{U}$ com as operações $\oplus$ e $\odot$ for um espaço vetorial.

Teorema (3)

O subconjunto $\mathcal{U} \neq \emptyset$ é um subespaço de $\mathcal{V}$ se, e só se, $\mathcal{U}$ é fechado para as operações do espaço vetorial $\mathcal{V}$.

Na prática, verificamos $\vec{0} \in \mathcal{U}$ ($\therefore$ não vazio), **SV1** e **SV2**.

Proposição (4)

Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ são subespaços de $\mathcal{V}$ então $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ é subespaço de $\mathcal{V}$.

§2. Combinações lineares

$(\mathcal{V}, +, \cdot)$ espaço vetorial

Combinação linear de vetores de $\mathcal{V}$

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \vec{v}_{n-1} + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares e $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vetores .

Geradores

$$S \subset \mathcal{V}$$

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R}(\forall i),\; \vec{v}_i \in \mathcal{V}(\forall i),\; n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

com a convenção

$$[\emptyset] := \{\vec{0}\}.$$

Proposição (5)

$[S]$ *é subespaço de* $\mathcal{V}$.

Teorema (6)

Sejam $S, T \subset \mathcal{V}$. *Então*

1. $S \subset [S]$;
2. *se* $S \subset T$ *então* $[S] \subset [T]$;
3. $\big[[S]\big] = [S]$;
4. *se* S *é subespaço então* $[S] = S$.

Dependência linear

Conjunto L.I.

$U \subset \mathcal{V}$ **linearmente independente** (L.I.) se $\forall \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset U$

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \vec{v}_{n-1} + \alpha_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$$

caso contrário, é **linearmente dependente** (L.D.)

Proposição (7)

Se $S \subset \mathcal{V}$ é L.I. então todo $\vec{v} \in [S]$ é escrito de forma única como combinação linear de vetores de S.

Base

$B \subset \mathcal{V}$ é **base** de $\mathcal{V}$ se

1. B é L.I.
2. B gera $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V}$ tem **dimensão finita** se admite uma base finita

Proposição (8)

Se $\mathcal{V}$ não trivial tem dimensão finita, então

1. *todo conjunto gerador finito pode ser reduzido a uma base;*
2. *todo conjunto L.I. pode ser estendido a uma base.*

Corolário (9)

Todo $\mathcal{V}$ de dimensão finita tem uma base.

Dimensão

Teorema (10)

Se $\mathcal{V} = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n]$ e $X = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ é L.I. então podemos reordenar $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ de modo que $\mathcal{V} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_t, \vec{u}_{t+1}, \ldots, \vec{u}_n]$.

Corolário (11)

$k \leqslant n$.

Teorema (12)

Se $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ e $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ são bases de $\mathcal{V}$ então $m = n$.

Se $\mathcal{V}$ tem dimensão finita, a **dimensão** de $\mathcal{V}$, $\dim(\mathcal{V})$, é a cardinalidade de uma base de $\mathcal{V}$.

com a convenção

$$\dim(\{\vec{0}\}) := 0.$$

Exercício

Um subespaço de um espaço de dimensão finita tem dimensão finita.

§3. Sistemas lineares

sistema de equações lineares
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = c_m \end{cases}$$

Uma **solução** é uma atribuição de valores reais às variáveis $x_i := \alpha_i$ tal que todas as equações lineares estejam satisfeitas.

Uma solução é um vetor $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ e $\vec{c}$ vetores no $\mathbb{R}^m$

(1) A é L.I. se, e só se, o **sistema linear homogêneo**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

admite somente **solução trivial** $\vec{x} = \vec{0}$.

(2) $\vec{c} \in [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$ se, e só se, o **sistema linear não homogêneo**

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{v}_i = \vec{c}$$

admite solução.

para todo i, $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \dots \\ a_{m,i} \end{pmatrix}$ com $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ para todos i, j

de modo que $\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = \vec{c}$ fica escrito como

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} \tag{4}$$

Teorema (13)

Um sistema linear homogêneo com m equações e $n > m$ variáveis admite solução não trivial.

Escalonamento de matriz

Uma matriz está na forma **escalonada por linhas** se

1. todas as linhas com pelo menos um elemento diferente de zero estão acima de todas as linhas com todos elementos iguais a zero;
2. o **pivô** de uma linha (o primeiro número diferente de zero a partir da esquerda) está sempre estritamente à direita do pivô da linha acima.

Dizemos que a matriz escalonada está na **forma escalonada reduzida** se todo elemento pivô é 1 e em sua coluna o pivô é o único elemento não-nulo.

Escalonamento de uma matriz refere-se ao processo de transformar uma matriz A em uma matriz B escalonada por linhas através de uma sequência de **operações elementares** nas linhas, as quais são

1. trocar duas linha $(L_i \leftrightarrow L_j)$;
2. multiplicar uma linha por uma constante α não nula $(L_i \rightarrow \alpha L_i)$;
3. somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha $(L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j)$.

Escrevemos $A \longrightarrow B$ se obtemos a matriz B a partir da matriz A por uma sucessão de operações elementares.

Se $A \longrightarrow B$ então $B \longrightarrow A$ pois as operações elementares são reversíveis.

Se $A \longrightarrow B$ então dizemos que as matrizes A e B são **linha equivalentes**.

Qualquer matriz não-nula é linha equivalente a uma matriz escalonada reduzida:

Seja $A = (a_{i,j})$ uma matriz não nula

1. $\ell = 1$;
2. Seja $c(\ell)$ o menor índice $\geqslant \ell$ de uma coluna não nula;
3. caso necessário permute duas linhas de modo que $a_{\ell,c(\ell)} \neq 0$;
4. multiplique a primeira linha por $1/a_{\ell,c(\ell)}$;
5. para cada $j \neq \ell$: subtraia da linha j a linha ℓ multiplicada por $a_{j,c(\ell)}$;
6. se há linha $> \ell$ não nula, some 1 a ℓ e repita o processo a partir do passo 2.

Teorema

Qualquer matriz não nula é linha equivalente a uma única matriz escalonada reduzida.

Espaço linha

Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, o **espaço-linha**$(A)$ é o subespaço do $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz (se as vemos como m vetores do $\mathbb{R}^n$)

$$\textbf{posto-linha}(A) := \dim(\text{espaço-linha}(A))$$

Proposição (14)

Se $A \longrightarrow B$ então espaço-linha(A) =espaço-linha(B).

Proposição (15)

As linhas não nulas de uma matriz escalonada são L.I.

A quantidade de linhas nulas é a **nulidade** de A.

Corolário (16)

Se $A \longrightarrow R$, R escalonada, posto-linha(A) é a quantidade de linhas não nulas em R.

Espaço coluna

Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, o **espaço-coluna**$(A)$ é o subespaço do $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas da matriz (se as vemos como vetores n do $\mathbb{R}^n$)

$$\textbf{posto-coluna}(A) := \dim(\text{espaço-coluna}(A))$$

Teorema (17)

Para toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *posto-linha*$(A) =$*posto-coluna*$(A)$.

$$\boxed{\textbf{posto}(A) := \text{posto-coluna}(A) = \text{posto-linha}(A)}$$

Teorema (18)

Se A tem posto m então o sistema linear $A\vec{x} = \vec{c}$ admite pelo menos uma solução.

Solução de sistemas lineares

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = c_m \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$[A|\vec{c}] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & c_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & c_m \end{pmatrix}$$

Teorema (19)

O sistema linear $A\vec{x} = \vec{c}$ *tem solução se, e somente se,*

$$posto(A) = posto([A|\vec{c}]).$$

Os sistemas lineares

$$A\vec{x} = \vec{c} \text{ e } B\vec{x} = \vec{d}$$

são **equivalentes** se admitem as mesmas soluções.

Teorema (20)

Os sistemas lineares $A\vec{x} = \vec{c}$ e $B\vec{x} = \vec{d}$ são equivalentes se as matrizes aumentadas $[A|\vec{c}]$ e $[B|\vec{d}]$ são linha equivalentes.

Corolário

$A\vec{x} = \vec{c}$ tem as mesmas soluções que $R\vec{x} = \vec{d}$ em que $[R|\vec{d}]$ é a matriz linha-equivalente escalonada reduzida de $[A|\vec{c}]$.

Método de Gauss–Jordan

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Dado um sistema linear $A\vec{x} = \vec{c}$, obtenha a forma escalonada reduzida $[R|\vec{d}]$ de $[A|\vec{c}]$.

1. se toda coluna da matriz R tem um pivô $(\mathrm{posto}(R) = \mathrm{posto}([R|\vec{d}]) = n)$, então a solução é única e é a solução do sistema escalonado;
2. se alguma linha de $[R|\vec{d}]$ é não nula apenas na última coluna $(\mathrm{posto}(R) < \mathrm{posto}([R|\vec{d}]))$ então o sistema não tem solução;
3. nos outros casos $(\mathrm{posto}(R) = \mathrm{posto}([R|\vec{d}]) < n)$ cada coluna com pivô corresponde a uma *variável pivô* e as outras variáveis são *livres*; escrevemos as variáveis pivô em função das variáveis livres. O sistema tem muitas soluções.

§4. Transformações lineares

Transformação linear

$\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são espaços vetoriais reais

$T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ é **transformação linear** (T.L.) se

1. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, para todos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U}$;
2. $T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v})$, para todos $\vec{v} \in \mathcal{U}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício

Se T é T.L. então $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

Equivalentemente, T é T.L. se

$$T(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha T(\vec{u})+\beta T(\vec{v})$$

para todos $\vec{u},\vec{v}\in\mathcal{U}$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Por indução, para todo inteiro positivo n

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T\left(\vec{v}_i\right).$$

Teorema (21)

Se $\mathcal{U}$ tem dimensão finita então qualquer transformação linear $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ fica definida pelos seus valores numa base de $\mathcal{U}$.

Imagem

$T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ uma T.L.

A imagem de T é o subconjunto

$$\mathrm{Im}(T) := \{\vec{v} \in \mathcal{V} \mid \exists \vec{u} \in \mathcal{U};\ T(\vec{u}) = \vec{v}\}$$

Proposição

$\mathrm{Im}(T)$ *é subespaço vetorial de* $\mathcal{V}$.

Núcleo ou Kernel

$$T : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \text{ uma T.L.}$$

O Núcleo (ou kernel) de T é o subconjunto

$$\mathrm{N}(T) = \ker(T) := \{\vec{u} \in \mathcal{U} \mid T(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Proposição

$\mathrm{N}(T)$ *é subespaço vetorial de* $\mathcal{U}$.

Posto

Exercício

Se $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ é uma T.L. e $\mathcal{U}$ tem dimensão finita então $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{N}(T)$ têm dimensão finita.

Portanto, se $\mathcal{U}$ tem dimensão finita ficam definidos

posto de T: $\text{posto}(T) := \dim(\mathrm{Im}(T))$

nulidade de T: $\text{nulidade}(T) := \dim(\mathrm{N}(T))$

Proposição (22)

$T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *é injetiva se, e somente se,* $\mathrm{N}(T) = \{\vec{0}\}$.

Teorema (Teorema do Posto)

Se $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ é uma T.L. e $\mathcal{U}$ tem dimensão finita então

$$\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)). \tag{5}$$

Ou, equivalente a (5)

$$\dim(\mathcal{U}) = \mathrm{posto}(T) + \mathrm{nulidade}(T).$$

Exercício

Se $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ é uma T.L. então decorre do teorema do posto que

1. *se* $\dim(\mathcal{U}) < \dim(\mathcal{V})$ *então T não é sobrejetiva;*
2. *se* $\dim(\mathcal{U}) > \dim(\mathcal{V})$ *então T não é injetiva*

Observação

Decorre do exercício que se T é bijetiva então $\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{V})$.

Corolário (Corolário do Teorema do Posto)

Se $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{U})$ *então são equivalentes:*

1. T *é sobrejetiva;*
2. T *é injetiva;*
3. T *é bijetiva;*
4. T *transforma base em* $\mathcal{U}$ *em base em* $\mathcal{V}$.

Isomorfismo

Uma T.L. bijetiva é chamada **isomorfismo**.

Os espaços vetorias $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são ditos **isomorfos** se existe um isomorfismo entre eles.

Teorema (23)

Dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, eles tem a mesma dimensão.

Corolário (24)

Todo espaço vetorial de dimensão n é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

§5. Matrizes e transformações lineares

Coordenadas com relação a uma base

$\mathcal{V}$ espaço vetorial de dimensão n e $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ uma **base ordenada**

$\vec{v} \in \mathcal{V}$ fica unicamente determinado por uma n-upla $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

De fato, $\vec{v} = \sum_i x_i \vec{v}_i$; e vice-versa, isto é,

$$\begin{aligned} [\quad]_B : \mathcal{V} &\to \quad \mathbb{R}^n \\ \vec{v} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é um isomorfimo.

Exercício

Mostre que $[\quad]_B$ *acima é uma transformação linear e é bijetiva.*

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

são as **coordenadas** de $\vec{v}$ com relação a base B

Matriz mudança de base

Sejam $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ e $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ bases ordenadas de $\mathcal{V}$

Para todo $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\vec{b}_j = \alpha_{1,j}\vec{a}_1 + \alpha_{2,j}\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_{n,j}\vec{a}_n$$

De modo que

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j \right) \vec{a}_i$$

se $[\vec{v}]_A = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ e $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ então

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$M_A^B := \left(\alpha_{i,j}\right)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$$

é a **matriz mudança de base** de B para A.

Reescrevemos (6) como

$$[\vec{v}]_A = M_A^B \cdot [\vec{v}]_B$$

Exercício

$[M]_A^B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por $[M]_A^B(\vec{x}) = M_A^B \cdot [\vec{x}]_B$, é um isomorfismo.

Matriz de uma Transformação Linear

$\mathcal{U}$ espaço vetorial e $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m)$ uma base.
$\mathcal{V}$ espaço vetorial e $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ uma base.

$T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ uma transformação linear. Para todo j,

$$T(\vec{b}_j) = \alpha_{1,j}\vec{a}_1 + \alpha_{2,j}\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_{m,j}\vec{a}_m$$

De modo que

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j \quad \Longrightarrow \quad T(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\vec{b}_j) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j \right) \vec{a}_i$$

Em coordenadas, se $[\vec{u}]_A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $[T(\vec{u})]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ então

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$[T]_A^B := (\alpha_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$$

é a **matriz da transformação** T com respeitos as bases B e A.

Reescrevemos (7) como

$$[T(\vec{u})]_A = [T]_A^B \cdot [\vec{u}]_B$$

Com essa notação, escrevemos $[\mathrm{Id}]_A^B$ para a matriz mudança de base, que corresponde a matriz da transformação linear identidade sobre $\mathcal{V}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}_{(\text{base } B)} &\to \mathcal{V}_{(\text{base } A)} \\ [\vec{v}]_B &\mapsto [\vec{v}]_A \\ [\vec{v}]_A &= [\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}]_A^B \cdot [\vec{v}]_B \end{aligned}$$

Exercício

$\text{posto}(T) = \text{posto}([T]_A^B)$?

Exercício (25)

Sejam $\mathcal{U}$ um espaço vetorial com bases (distintas) B_1 e B_2. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial com bases (distintas) D_1 e D_2. Prove que

$$[T]_{D_2}^{B_2} = [\mathrm{Id}]_{D_2}^{D_1}[T]_{D_1}^{B_1}[\mathrm{Id}]_{B_1}^{B_2} \tag{8}$$

§6. Espaço vetorial das transformações lineares

O espaço vetorial das T.L. $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$.

$\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ denota o conjunto de todas as transformações lineares com domínio $\mathcal{U}$ e contradomínio $\mathcal{V}$.

Exercício

$\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ é um espaço vetorial real com as operações usuais de soma de funções e produto de função por escalar.

Espaços de dimensão finita

Se $\mathcal{U}$ tem base $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ e $\mathcal{V}$ tem base $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m)$ e

$S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, então

$$[S + T]_B^A = [S]_B^A + [T]_B^A$$
$$[\lambda S]_B^A = \lambda [S]_B^A$$

ou seja,
$[\quad]_B^A : \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \to M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é transformação linear.

Espaços de dimensão finita

Teorema (26)

$[\quad]_B^A : \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um isomorfismo.

Corolário

$\dim(\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})) = m\cdot n.$

Corolário

Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ é a transformação nula então $[T]_B^A$ é a matriz nula.

Composição

Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ e $S \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ então $S \circ T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{W})$ i.e.

$$S \circ T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$$

dada por

$$S \circ T(\vec{u}) := S\big(T(\vec{u})\big)$$

é uma transformação linear.

Exercício

Verifique que $S \circ T$ é uma transformação linear.

Propriedades

Exercício

Para quaisquer $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, *quaisquer* $Q, R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ *e qualquer* $P \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{X})$ *valem*

1. $S \circ (Q + R) = (S \circ Q) + (S \circ R)$;
2. $(S + T) \circ Q = (S \circ Q) + (T \circ Q)$;
3. $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \circ R = R$ *e* $R \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{U}} = R$;
4. *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(S \circ R) = (\alpha S) \circ R = S \circ (\alpha R)$;
5. $P \circ (S \circ R) = (P \circ S) \circ R$.

Composição em espaços de dimensão finita

Se $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetorias e $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m)$ e $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k)$ respectivas bases ordenadas

Proposição (27)

Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ e $S \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ então $[S \circ T]_C^A = [S]_C^B \cdot [T]_B^A$.

Inversa

Uma função $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tem **inversa** se existe uma função $S : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ tal que

$$S \circ T = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}} \qquad e \qquad T \circ S = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$$

Proposição (28)

Se T tem inversa, é única.

Notação: T^{-1} denota a inversa de T

Proposição (29)

T tem inversa se, e só se, T é bijetiva.

Teorema (30)

Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ *tem inversa então* $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U})$.

Inversa em espaços de dimensão finita

Teorema (31)

Se $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ têm dimensão finita, então para respectivas bases A, B temos para toda $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

$$[T^{-1}]_B^A = \left([T]_B^A\right)^{-1}$$

Corolário

T é isomorfismo se, e só se, $[T]_B^A$ é invertível.

Exercício

Se a matriz A é uma matriz de mudança de base então A é invertível.

Exercício

Se $S \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ e $R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ então $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ quando as inversas existem.

§7. Determinantes

Matrizes inversas

A matriz B $n \times m$ tem inversa a esquerda se existe uma matriz A $m \times n$ tal que $AB = \mathrm{Id}_m$

A matriz B $n \times m$ tem inversa a direita se existe uma matriz C $m \times n$ tal que $BC = \mathrm{Id}_n$

Exercício

Se $AB = \mathrm{Id}_m$ e $BC = \mathrm{Id}_n$ então $A = C$.

Matriz inversa ou não singular

A matriz B tem inversa, ou é **invertível**, se existe uma matriz C tal que $BC = CB = \mathrm{Id}$.
Nesse caso B também é chamada de **não singular**

Notação: B^{-1} denota a inversa de B

Exercício

Deduza do Teorema do Posto e da Proposição 29 que se B tem inversa então B é uma matriz quadrada.

Matrizes elementares

Uma **matriz elementar** é uma matriz obtida submetendo a matriz identidade Id a uma das operações elementares das linhas de uma matriz

1. trocar duas linhas: $\mathrm{Id} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \mathbf{E_{i,j}}$ $(i \neq j)$;
2. multiplicar linha por uma constante não nula: $\mathrm{Id} \xrightarrow{L_i \to \alpha L_i} \mathbf{E}_{(\alpha)\,\mathbf{i}}$;
3. somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha: $\mathrm{Id} \xrightarrow{L_i \to L_i + \alpha L_j} \mathbf{E}_{\mathbf{i},(\alpha)\,\mathbf{j}}$ $(i \neq j)$.

Se A é uma matriz quadrada então

1. $E_{i,j} \cdot A$ resulta na matriz A com as linhas i e j trocadas;
2. $E_{(\alpha)\,i} \cdot A$ resulta na matriz A com a i-ésima linha multiplicada por α;
3. $E_{i,(\alpha)\,j} \cdot A$ resulta na matriz A após a soma de α vezes a j-ésima linha sobre a i-ésima.

Exercício

Toda matriz elementar é invertível.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ -2d+g & -2e+h & -2f+g\end{pmatrix}$$

Proposição (31)

Se $A \longrightarrow B$ *então existe uma sequência* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ *de matrizes elementares tais que* $B = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A$.

Proposição (32)

A forma escalonada reduzida de uma matriz invertível A é a identidade.

Nesse caso, $A \longrightarrow \mathrm{Id}$, existe uma sequência $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de matrizes elementares tais que

$$\mathrm{Id} = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

portanto

$$\mathrm{A}^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot \mathrm{Id}$$

Lema (33)

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, puder ser escrita como o produto de matrizes elementares, i.e., existem matrizes elementares E_i tais que

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k$$

Exercício

Uma operação elementar nas linhas de uma matriz $n \times n$ é uma transformação linear em $\mathcal{L}(M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ cuja representação matricial é a matriz elementar correspondente.

Teorema (34)

Para toda matriz quadrada A de ordem n são equivalentes:

1. $posto(A) = n$;
2. $A\vec{x} = \vec{b}$ *tem solução única para todo* $\vec{b}$;
3. $A\vec{x} = \vec{0}$ *tem somente a solução trivial* $\vec{x} = \vec{0}$;
4. A *é invertível;*
5. $A \longrightarrow \mathrm{Id}_n$.

Em qualquer desses casos A é dita **não singular**

Função determinante

$D : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ é uma **função determinante** se

1. $D(A) = 0$ se A tem linhas L.D.
2. $D(\mathrm{Id}) = 1$;
3. D é multilinear nas linhas.

Propriedades de uma função determinante

Proposição (35)

$D(A) = -D(E_{i,i+1} \cdot A)$, *isto é, permutar duas linhas consecutivas muda o sinal de uma função determintante.*

Propriedades de uma função determinante

Teorema (36)

Para qualquer escalar $\alpha \neq 0$ e quaisquer $i \neq j$

1. *Se* $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} B$ *então* $D(B) = -D(A)$.
2. *Se* $A \xrightarrow{L_i \leftarrow \alpha L_i} B$ *então* $D(B) = \alpha D(A)$.
3. *Se* $A \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j} B$ *então* $D(A) = D(B)$.

Propriedades de uma função determinante

Corolário (37)

Se $A \longrightarrow B$ *então* $D(A) = 0 \Leftrightarrow D(B) = 0$.

Corolário (38)

$D(E \cdot A) = D(E) \cdot D(A)$ *para qualquer matriz elementar* E.

Observação (39)

Se $A \longrightarrow B$ *então* $B = E_1 \cdots E_r A$*, portanto, existem escalares* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *tais que*

$$D(B) = (-1)^t \alpha_1 \cdots \alpha_s D(A) \tag{9}$$

onde t é o número de operações de troca (permuta) de duas linhas e s é o número de operações de substituição de uma linha por um múltiplo escalar dela.

Teorema (40)

A é não singular se, e somente se, $D(A) \neq 0$.

Teorema (41)

$D(A \cdot B) = D(A)D(B)$

Teorema

Existe uma função determinante.

Teorema

A função determinante é única.

Notação: $\det(A)$ é o determinante da matriz A.

§8. Autovalores e autovetores

Subespaço invariante

Sejam $T \subset \mathcal{L}(\mathcal{V})$ e $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ subespaço

$\mathcal{U}$ é **invariante** por T se $T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$

$T\big|_{\mathcal{U}}$ denota a restrição de T a $\mathcal{U}$; $T\big|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$

$\dim(\mathcal{U}) = 1 \Longrightarrow \mathcal{U} = [\vec{u}]$ para algum $\vec{u} \neq \vec{0}$ e

$\mathcal{U}$ invariante por $T \iff T(\alpha\vec{u}) =\in [\vec{u}] \iff T(\vec{u}) = (\beta/\alpha)\vec{u}$.

Autovetor e Autovalor

$\vec{u} \in U$ não nulo é **autovetor** de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ se

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } T(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$$

λ é **autovalor associado a** $\vec{u}$, o qual é único

Autoespaço ou subespaço próprio do autovalor λ

$$V(\lambda) = \{\vec{u} \in \mathcal{U} \mid T(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}$$

$V(\lambda) = \ker(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{U}})$ portanto é subespaço.

Valem:

(1) todo $\vec{u} \in V(\lambda)$ não nulo é autovetor de T

(2) $V(\lambda)$ é invariante por T

Polinômio característico

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ com $\dim(\mathcal{U}) = n$

$\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$

se, e só se, $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{U}})(\vec{x}) = \vec{0}$

se, e só se, $(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{U}})$ não tem inversa.

se, e só se, $[T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}]_B^B$ não tem inversa, para qualquer base B

se, e só se, $[T]_B^B - \lambda \mathrm{Id}_n$ não tem inversa

se, e só se,

$$\det([T]_B^B - \lambda \mathrm{Id}_n) \neq 0$$

Polinômio característico

$\det([T]_B^B - \lambda \mathrm{Id}_n)$ é um polinômio em λ de grau n.

Esse polinômio não depende da base:

Pelo Exercício 25, pág. 100, se C é base

$$[T]_C^C = [\mathrm{Id}]_B^C [T]_B^B [\mathrm{Id}]_C^B \text{ onde } [\mathrm{Id}]_B^C = ([\mathrm{Id}]_C^B)^{-1}$$

de modo que $\det\big([T]_C^C - \lambda \mathrm{Id}_n\big)$ é

$$\begin{aligned}
\det\big([\mathrm{Id}]_B^C [T]_B^B [\mathrm{Id}]_C^B - \lambda \mathrm{Id}_n\big) &= \det\big([\mathrm{Id}]_B^C [T]_B^B [\mathrm{Id}]_C^B - \lambda [\mathrm{Id}]_B^C \mathrm{Id}_n [\mathrm{Id}]_C^B\big) \\
&= \det\big([\mathrm{Id}]_B^C ([T]_B^B - \lambda \mathrm{Id}_n)[\mathrm{Id}]_C^B\big) \\
&= \det\big([\mathrm{Id}]_B^C\big)\det\big([T]_B^B - \lambda \mathrm{Id}_n\big)\det\big([\mathrm{Id}]_C^B\big) \\
&= \det\big([T]_B^B - \lambda \mathrm{Id}_n\big)
\end{aligned}$$

Polinômio característico

O polinômio característico de T é dado por

$$p_T(\lambda) := p_{[T]_B^B}(\lambda) = \det\left([T]_B^B - \lambda \mathrm{Id}_n\right)$$

e não depende da base B.

As raízes reais de $p_T(\lambda)$ são os autovalores de T.

Matrizes

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um operador em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Autovalor $\vec{x} \neq \vec{0}$ com autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Polinômio característico de A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$$

Teorema (42)

0 é um autovalor de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se, e só se, A é singular.

Teorema (Teorema 34 revisitado)

Para toda matriz quadrada A de ordem n são equivalentes:

1. $posto(A) = n$;
2. $A\vec{x} = \vec{b}$ *tem solução única para todo* $\vec{b}$;
3. $A\vec{x} = \vec{0}$ *tem somente a solução trivial* $\vec{x} = \vec{0}$;
4. A *é invertível;*
5. $A \longrightarrow \mathrm{Id}_n$;
6. $\det(A) \neq 0$;
7. 0 *não é autovalor de* A.

Teorema (43, parte 1)

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ *e* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ *uma base de* $\mathcal{U}$.

$$Se\ [T]_B^B = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-1} & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \text{ é uma matriz diagonal}$$

então

$$T(\vec{b}_i) = a_i \vec{b}_i \text{ para todo } i.$$

Teorema (43, parte 2)

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ *e* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ *uma base de* $\mathcal{U}$.
Se $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ *são autovetores de* T *então*

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Teorema (44)

Sejam $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ *autovetores de* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ *com os respectivos autovalores associados* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$*. Se* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *sempre que* $i \neq j$*, então* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ *é l.i..*

Diagonalização de um operador linear

Seja $\mathcal{U}$ espaço vetorial finito dimensional.

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ é **diagonalizável** se existe uma base B de $\mathcal{U}$ formada por autovetores de T

Reescrevendo o Teorema 43,

Teorema (43)

Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, com $\mathcal{U}$ de dimensão finita. Então, T é diagonalizável se, e somente se, existe uma base de $\mathcal{U}$ em cuja representação matricial de T é uma matriz diagonal.

Diagonalização de uma matriz

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é **diagonalizável** se existe $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ não singular tal que $M^{-1}AM$ é diagonal.

Ou seja, A é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.

Proposição

T é diagonalizável se, e só se, $[T]_B^B$ é diagonalizável.