MCTB00011-17 Álgebra Linear

Professor: `jair.donadelli@ufabc.edu.br`
Sala: 546-2-A

2025-1

UFABC

Planos

Ementa Sistemas Lineares. Espaços vetoriais. Transformações lineares. Autovalores e autovetores. Diagonalização de operadores. Produtos internos e normas. Ortogonalização.

Provas 3 provas/sub/rec

Frequência $\geq 75\%$

Planos

Referências bibliográficas

- FERREIRA, V.O. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*
- ANTON, H. e RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*
- CALLIOLI, C.A. e outros. *Álgebra Linear e Aplicações*

Planos

Página web com as informações

Consulte:

http://professor.ufabc.edu.br/~jair.donadelli/algelin/

para os detalhes.

Sumário I

UFABC

Google é um grande consumidor de álgebra linear

Busca e tradutor

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

AMS subject classifications. 15-01, 15A18, 15A51

MIT Technology Review

NEWS & ANALYSIS FEATURES VIEWS MULTIMEDIA DISCUSSIONS TOPICS POPULAR: GLASS, DARKLY RECHARGEABLE FUEL

VIEW 20 COMMENTS

Emerging Technology From the arXiv
September 25, 2013

How Google Converted Language Translation Into a Problem of Vector Space Mathematics

To translate one language into another, find the linear transformation that maps one to the other. Simple, say a team of Google engineers

UFABC

Navegação — GPS

Usam preditor de deslocamento

2010 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation

A Linear Algebraic Approach to Kalman Filtering

Yiping Cheng
Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China
ypcheng@ustc.edu

***Abstract*—A new linear algebraic approach is used here to derive the celebrated Kalman filter. The filtering problem is first converted into an equivalent linear algebraic problem by relating the estimate of process state to the vector of measured output via a linear equation. Then we obtain the Kalman recursion equations by using a simple linear algebraic lemma. This derivation is conceptually simple, elegant, and thus very suitable for pedagogical purposes. Another advantage of our approach is that the noise correlated case is dealt with as easily as the noise uncorrelated case.**

noise, and output signals; the n_ξ-dimensional vector ξ and each w_k are random vectors satisfying

$$\xi \sim N(0, I), \tag{4}$$

$$w_k \sim N(0, I) \text{ for all } k \geq 0, \tag{5}$$

$$\xi \text{ and all } w_k (k \geq 0) \text{ are mutually independent.} \tag{6}$$

Conferences > 1996 IEEE/SICE/RSJ Internatio...

A Kalman filter to estimate direction for automotive navigation

Publisher: IEEE   Cite This   PDF

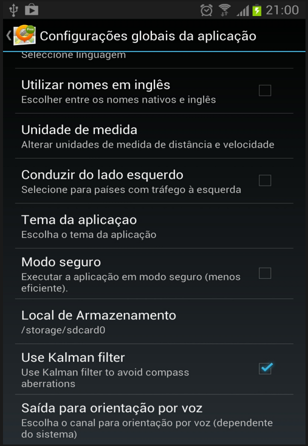
M. Hoshino ; Y. Gunji ; S. Oho ; K. Takano   **All Authors**

Abstract
Authors
References
Citations

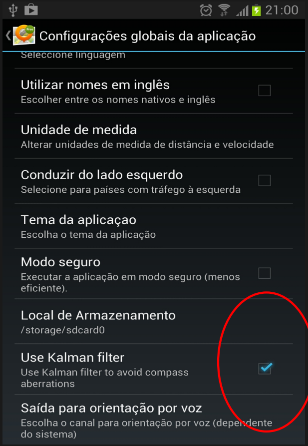
Abstract:
A Kalman filter algorithm to estimate direction for automotive navigation is reported. An extended Kalman filter is used to combine a magnetic compass and a rate gyroscope and to compensate for the sensor errors; the result is an optimal estimate for heading direction. A mathematical model for magnetic compass errors caused by body magnetization and the body effect of magnetic material is proposed. An error model of the rate gyroscope is also established. Errors of both sensors are calibrated through a computer simulation. Finally, experimental navigation results are demonstrated.

UFABC

num aplicativo de navegação para *smartphone*

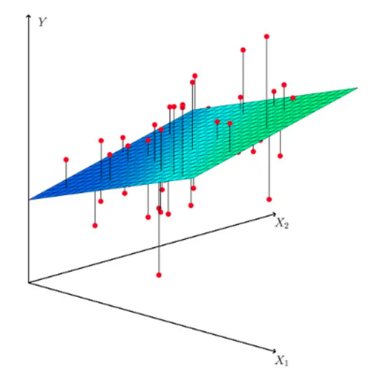


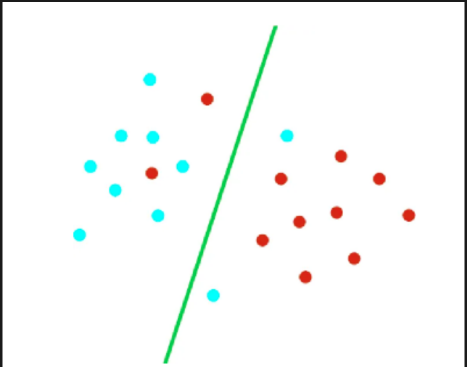
num aplicativo de navegação para *smartphone*



Aprendizado de máquinas

Predição e Classificação





Aprendizado de máquinas

The Netflix Prize and Singular Value Decomposition

> NOTE: The following are based on the winning submission paper as well as their subsequent publication.

Problem Statement

The Netflix Prize was an open competition for the best **collaborative filtering algorithm** to predict user ratings for films, based on previous ratings without any other information about the users or films, i.e. without the users or the films being identified except by numbers assigned for the contest.

The competition was held by Netflix, and on September 21, 2009, the grand prize of US $1,000,000 was given to the BellKor's Pragmatic Chaos team which bested Netflix's own algorithm for predicting ratings by 10.06%

MATRIX FACTORIZATION TECHNIQUES FOR RECOMMENDER SYSTEMS

Yehuda Koren, *Yahoo Research*
Robert Bell and Chris Volinsky, *AT&T Labs—Research*

UFABC

§1 — Matriz

UFABC

Matriz

Matriz de números reais com m linhas e n colunas é representada como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

onde $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ é o índice da linha e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ o da coluna.

UFABC

Matriz

Escrevemos, genericamente,

$$A = [a_{i,j}] \tag{1}$$

para nos referirmos aos elementos $a_{i,j}$ de A e

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{ou} \quad A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \tag{2}$$

para explicitar que a é uma matriz de m linhas por n colunas cujas entradas são números reais.

Operações com matrizes

Soma de matrizes

Se $[a_{i,j}]$ e $[b_{i,j}]$ são duas matrizes **de mesmas dimensões**, então

$$[a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Multiplicação por escalar

Se $[a_{i,j}]$ é matriz e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha \cdot [a_{i,j}] = [\alpha \cdot a_{i,j}]$$

$$\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \cdots & \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \cdots & \alpha a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha a_{m,1} & \alpha a_{m,2} & \cdots & \alpha a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Com isso

$$-A \text{ é a matriz } (-1) \cdot A$$

Operações com matrizes

Produto de matrizes

$[a_{i,j}]$ matriz $m \times \mathbf{n}$ e $[b_{i,j}]$ matriz $\mathbf{n} \times p$

$$[a_{i,j}] \cdot [b_{i,j}] = [c_{i,j}]$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,j} & \cdots & b_{n,p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,p} \end{bmatrix}, \quad \text{onde } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

UFABC

Operações com matrizes

Produto de matrizes

No produto $A \cdot B = C$ o $c_{i,j}$ é "produto escalar" da linha i de A com a coluna j de B.

Inversa e Identidade

A **inversa** da matriz A, denotada A^{-1}, **quando existe**, é *a única* matriz tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\textbf{matriz identidade}}$$

Uma matriz que tem inversa é dita inversível.

Uma matriz inversível é quadrada, ou seja,

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ de linhas} = \text{n}^{\text{o}} \text{ de colunas}.$$

A matriz identidade $\mathrm{I}_n = (e_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é quadrada com $e_{i,j} \in \{0, 1\}$ e $e_{i,j} = 1$ se e somente se $i = j$.

Operações com matrizes

Propriedades

A soma tem as seguintes propriedades: para $A, B, C, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1. Comutatividade: $A + B = B + A$
2. Associatividade: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. Elemento Neutro: $A + \mathbf{0} = A$ em que $\mathbf{0}$ é a matriz com a mesma dimensão de A e os elementos nulos
4. Elemento Oposto: Para cada A, $A + (-A) = \mathbf{0}$

Operações com matrizes

Propriedades

A multiplicação por escalar tem as seguintes propriedades: para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. Distributividade sobre a soma de matrizes: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. Distributividade sobre a soma de escalares: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. Associatividade com escalares: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. Elemento Neutro: $1A = A$

Operações com matrizes

Propriedades

O produto de matrizes tem as seguintes propriedades: para $A, E \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, D \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Associatividade: $(AB)C = A(BC)$.
2. Distributividade sobre a soma de matrizes: $A(B + D) = AB + AD$ e $(A + E)B = AB + EB$
3. Elemento Neutro: $A\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_m A = A$
4. Compatibilidade com a multiplicação por escalar: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Operações com matrizes

Propriedades

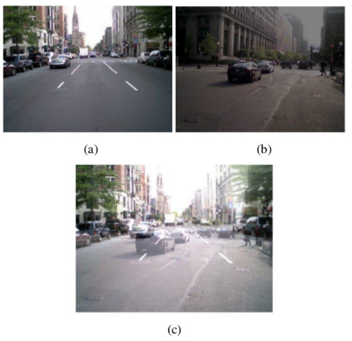
O produto de matrizes, em geral, não é comutativo

$$AB \neq BA$$

Exemplos ilustrados

Imagens são representadas em computador por matrizes.

Soma de matrizes:



Exemplos ilustrados

Imagens são representadas em computador por matrizes.

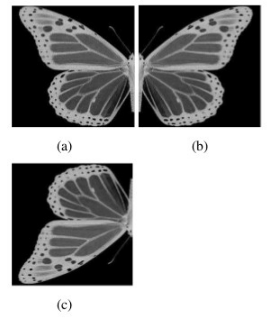
Diferença:

A $\qquad B \qquad A - B$

Exemplos ilustrados

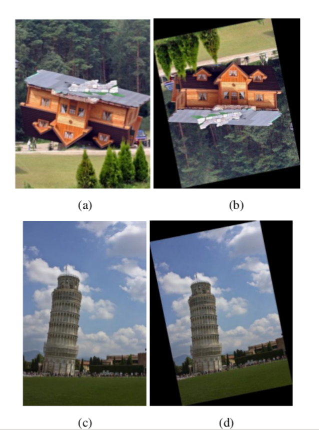
Imagens são representadas em computador por matrizes.

Produto:


(a) (b) (c)

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A é matriz da imagem (a)
(b) é o resultado de $A \cdot X$
(c) é o resultado de $X \cdot A$



$$\text{Rotação } R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A é a matriz de (a)
C é a matriz de (c)

$R_z(\pi - \pi/16) \cdot A$ é a matriz de (b)

$R_z(\pi/16) \cdot C$ é a matriz de (c)

UFABC

Exercício

Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *inversíveis. Então*

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n.$

§2 — Sistema de equações lineares

Sistema linear a 2 equações e 2 incógnitas

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

Conjunto das soluções é formado por todos pares $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tais que para $x = s$ e $y = t$ ambas igualdades valem.

Professor: jair.donadelli@ufabc.edu.br *Sala*: 546-2-A

Sistema linear a 2 equações e 2 incógnitas

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

tem as mesmas soluções que

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 0x + 11y = -33 \end{cases}$$

O **conjunto das soluções** é invariante pelas operações

1. trocar a posição das duas linha;
2. multiplicar uma linha por uma constante $\alpha \neq 0$;
3. somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha.

ditas operações elementares **nas equações do sistema**.

UFABC

Sistema linear a 2 equações e 2 incógnitas

Exercício

Verifique que o conjunto das soluções de um sistema linear a 2 equações e 2 incógnitas é invariante pelas operações elementares nas equações do sistema.

Exercício

Verifique que cada operação elementar na equação de um sistema é reversível por meio de outra operação elementar.

Sistema linear a 2 equações e 2 incógnitas

Resumindo

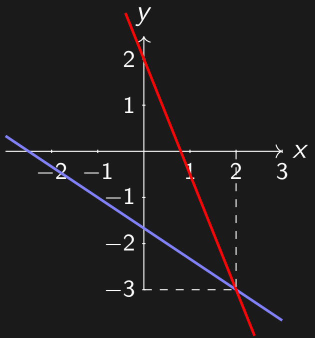
A aplicação de qualquer uma das operações elementares **não muda** o número de equações, nem o número de incógnitas e nem **o conjunto solução**.

Cada operação elementar é reversível por meio de outra operação elementar.

Os sistemas lineares nas mesmas incógnitas com **mesmo conjunto solução** são chamados de equivalentes.

Sistema linear — visto pelas linhas

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$



Sistema linear a 2 equações e 2 incógnitas — visto pelas linhas

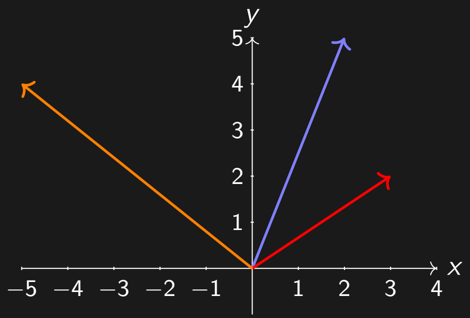
Da Geometria Analítica:

- não tem solução (impossível)
- tem **uma** solução (possível determinado)
- tem infinitas soluções (possível indeterminado)

Sistema linear — visto pelas colunas

$$\begin{cases} 2x + 3y & = -5 \\ 5x + 2y & = 4 \end{cases}$$

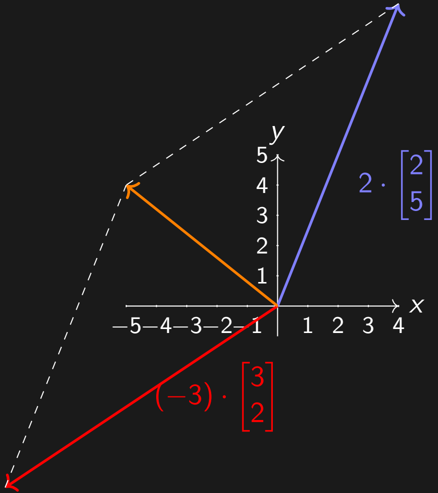
$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Sistema linear — visto pelas colunas

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$x\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} y}_{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Sistema linear — forma matricial

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} -2/11 & 3/11 \\ 5/11 & -2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/11 & 3/11 \\ 5/11 & -2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Equação linear a m incógnitas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_{m-1}x_{m-1} + a_mx_m = b$$

coeficientes: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ são elementos de $\mathbb{R}$

termo independente: b também pertence a $\mathbb{R}$

incógnitas: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m$

Equação linear a m incógnitas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_{m-1}x_{m-1} + a_mx_m = b$$

solução: sequência de valores reais $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ que atribuídos às incógnitas $x_1 = s_1, \ldots, x_m = s_m$ satisfaz a igualdade na equação.

conjunto solução:

$$\mathcal{S} = \{(s_1, s_2, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m \colon (s_1, s_2, \ldots, s_m) \text{ é solução da equação}\}$$

Sistema linear a n equações e m incógnitas

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

Solução do sistema é uma sequência de valores para as incógnitas que satisfaz, concomitantemente, **todas** as igualdades dos sistema. O **conjunto solução** é

$$\mathcal{S} = \{(s_1, s_2, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m : (s_1, s_2, \ldots, s_m) \text{ é solução do sistema}\}$$

UFABC

Sistema linear a n equações e m incógnitas

Exercício: Verifique as afirmações a seguir.

A aplicação de qualquer uma das operações elementares sobre as equações de um sistema linear não muda o número de equações, não muda o número de incógnitas e não muda conjunto solução do sistema.

Cada operações elementar é reversível por meio de outra operação elementar.

UFABC

Matrizes de um sistema linear

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

UFABC

Matrizes de um sistema linear

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad\vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n
\end{cases}
$$

Matriz das incógnitas

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}
$$

Matrizes de um sistema linear

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

Matriz dos termos independentes

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

UFABC

Sistema linear na forma matricial

$$\boxed{AX = B}$$

Uma solução é uma matriz-coluna $\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ tal que $X = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$ torna a igualdade $AX = B$ verdadeira.

Teorema 1

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é inversível então $AX = B$ tem uma única solução qualquer que seja $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Em particular, $AX = \mathbf{0}$ admite apenas a solução $X = \mathbf{0}$.

Demonstração.

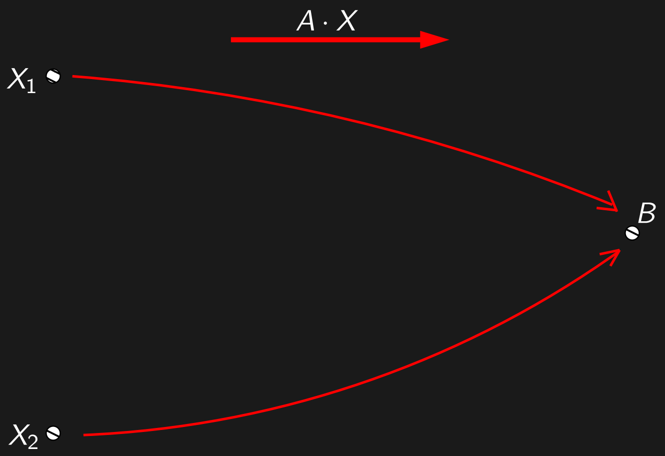
$X = A^{-1}B$ é solução. Sejam X_0 e Y_0 soluções.
$AX_0 = B$ e $AY_0 = B$ temos $AX_0 = AY_0$, multiplicando pela inversa de A à esquerda $X_0 = Y_0$. ♦

O sistema linear $AX = B$ pode

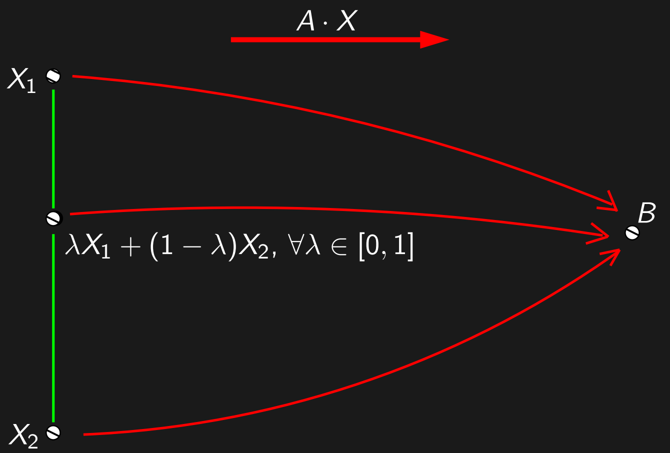
1. ter solução,
   1. ter uma solução, ou
   2. ter mais que uma solução, ou
2. não ter solução.

Professor: jair.donadelli@ufabc.edu.br *Sala*: 546-2-A

Se $AX = B$ é sistema linear com > 1 solução:



... então tem infinitas



Teorema 2

O sistema linear $AX = B$ pode

1. ter só uma solução — **possível e determinado**;
2. ter infinitas soluções — **possível e indeterminado**;
3. não ter solução — **impossível**.

◆

§3 — Escalonamento de matriz e Matriz elementar

Operações elementares sobre linhas de matriz

L_i denota a linha i de uma matriz

	Operação	Notação
I	trocar duas linha	$L_i \leftrightarrow L_j$
II	multiplicar por escalar $\alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
III	somar a uma linha um múltiplo de outra	$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Exemplo de operações sobre uma matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

UFABC

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 6L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 & -33 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 & -33 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

UFABC

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -12 & -33\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & -12 & -33\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 12 L_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2 L_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

UFABC

Matrizes equivalentes

Duas matrizes A e B quaisquer são ditas **linhas-equivalentes**, denotado por

$$A \leftrightarrow B$$

se uma pode ser obtida da outra por uma sequência de operações elementares.

Escalonamento de matriz

Uma matriz está na forma **escalonada por linhas** se

1. todas as linhas nulas (caso existam) estão abaixo das linhas não nulas, e
2. o primeiro número $\neq 0$ de uma linha não nula, o **pivô da linha**, está mais a direita do que o pivô da linha acima.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$*$ é pivô $\neq 0$ e $-$ é escalar qualquer

Exemplos de matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 3

Qualquer matriz é linha-equivalente a uma matriz escalonada.

Demonstração

Seja $A = [a_{i,j}]$ uma matriz não nula ($\mathbf{0}$ é escalonada). Façamos

(1) $\ell = 1$. Repita enquanto houver linha $> \ell$ não nula:

- (1.1) Seja $c(\ell)$ o menor índice $\geq \ell$ de uma coluna não nula;
- (1.2) caso necessário permute duas linhas de modo que $a_{\ell,c(\ell)} \neq 0$, esse é o pivô da linha ℓ;
- (1.3) para cada $j > \ell$ faça $L_j \leftarrow L_j + \left(\frac{-a_{j,c(\ell)}}{a_{\ell,c(\ell)}}\right) L_\ell$;
- (1.4) $\ell = \ell + 1$.

Após um número finito de passos o processo termina com uma matriz escalonada. ♦

Observe que para cada $c(\ell)$ determinado na linha 2 pode haver mais de uma linha j com $a_{j,c(\ell)} \neq 0$.

Escolhas diferentes para essa linha podem resultar em matrizes escalonadas distintas.

Matrizes elementares

Representação matricial das operações elementares

Matriz elementar é qualquer matriz obtida submetendo a matriz identidade I_n a uma **única** operação elementar

1. trocar duas linhas: $\mathrm{I}_n \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \mathbf{E_{i,j}} \quad (i \neq j)$;
2. multiplicar linha por uma constante não nula: $\mathrm{I}_n \xrightarrow{L_i \leftarrow \alpha L_i} \mathbf{E_{(\alpha),i}} \quad (\alpha \neq 0)$;
3. somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha: $\mathrm{I}_n \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j} \mathbf{E_{i,(\alpha),j}} \quad (\alpha \neq 0, i \neq j)$.

Matrizes elementares

Matrizes elementares podem ser usadas para realizar, por meio da multiplicação à esquerda, operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

Matrizes elementares

Se A é uma matriz então

1. $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \mathbf{E_{i,j}} \cdot A$

2. $A \xrightarrow{L_i \leftarrow \alpha L_i} \mathbf{E}_{(\alpha),\mathbf{i}} \cdot A$

3. $A \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j} \mathbf{E}_{\mathbf{i},(\alpha),\mathbf{j}} \cdot A$

(observada a compatibilidade das dimensões das matrizes).

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ k & l & m & n & o \\ f & g & h & i & j \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -2d + g & -2e + h & -2f + i \end{bmatrix}$$

UFABC

Matrizes elementares

Proposição 1

Toda matriz elementar é inversível.

Demonstração

Seja $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz elementar.

Se $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz elementar correspondente à operação que reverte a operação elementar que define E, então $FE = \mathrm{I}_n$.

Analogamente, se $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz elementar correspondente à operação que reverte a operação elementar que define F, então $JF = \mathrm{I}_n$.

$J = J \cdot \mathrm{I}_n = J \cdot (F \cdot E) = (J \cdot F) \cdot E = \mathrm{I}_n \cdot E = E.$

Portanto, $FE = \mathrm{I}_n = EF$, logo $F = E^{-1}$.

Matrizes elementares

Proposição 2

Se $A \leftrightarrow B$ então existe uma sequência $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de matrizes elementares tais que $B = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A$. ♦

... logo ${E_1}^{-1}{E_2}^{-1} \cdots {E_k}^{-1}B = A$.

Como o produto de matrizes inversíveis é inversível:

Corolário da Proposição 2

Se $A \leftrightarrow B$ então existe P inversível tal que $B = P \cdot A$. Ademais, A é inversível se e somente se B é inversível. ♦

UFABC

Matrizes elementares

Proposição 3

Se $A \leftrightarrow \mathrm{I}_n$ então $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é produto de matrizes elementares, portanto inversível.

Para a demonstração, note que

$$\begin{aligned}
E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = \mathrm{I}_n &\Leftrightarrow A = (E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1)^{-1} \mathrm{I}_n = (E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1)^{-1} \\
&\Leftrightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} \\
&\Leftrightarrow A^{-1} = (E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1})^{-1} \\
&\Leftrightarrow A^{-1} = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1
\end{aligned}$$

Matrizes elementares

Corolário da Proposição 3

Se $A \leftrightarrow \mathrm{I}_n$ então a a mesma sequência de operações elementares sobre A que produz I_n, produz A^{-1} a partir de I_n.

UFABC