Sumário

Vimos...

Se $A \leftrightarrow \mathrm{I}_n$, então

- existem $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementares $E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = \mathrm{I}_n$
- $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$
- A inversível e $A^{-1} = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 \mathrm{I}_n$.

UFABC

Inversão de matrizes

Sabendo $A \to \mathrm{I}_n$

Assim temos um método prático para inversão de matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1]{L_1 \leftrightarrow (1/2)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -11/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - (3/2)L_2]{L_2 \leftrightarrow (-2/11)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1]{L_1 \leftrightarrow (1/2)L_1} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - (3/2)L_2]{L_2 \leftrightarrow (-2/11)L_2} \begin{bmatrix} -2/11 & 3/11 \\ 5/11 & -2/11 \end{bmatrix}$$

Inversão de matrizes

Sabendo $A \to \mathrm{I}_n$

Usando o processo de escalonamento com as mesmas operações elementares, a partir de I_n obtemos A^{-1}

Usa-se escrever tal processo na forma

$$[A|\mathrm{I}_n] \leftrightarrow [\mathrm{I}_n|A^{-1}]$$

Matriz escalonada reduzida

Uma matriz escalonada está na forma **reduzida** se

3. todo elemento pivô é 1 e em sua coluna o pivô é o único elemento não-nulo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & - & 0 & 0 & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

UFABC

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ está na forma escalonada mas não reduzida;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ está na forma escalonada reduzida;

Matriz escalonada reduzida

Dado A, obtemos uma matriz escalonada reduzida da seguinte forma:

1. Produz-se uma matriz escalonada a partir de A;
2. transforma-se os pivô em 1 usando operações do tipo II;
3. faz-se um retroescalonamento (de baixo pra cima, da direita pra esquerda) e zeram-se as entradas acima dos pivôs.

UFABC

consequentemente

Proposição 4

Se $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é uma matriz escalonada então a quantidade de pivôs p satisfaz

$$0 \leqslant p \leqslant \min\{n, m\} \tag{1}$$

Proposição 5

Toda matriz **quadrada**, *escalonada e* **com pivô em todas as linhas** *(sem linhas nulas) é linha-equivalente a matriz identidade, ou seja, nessas hipóteses o processo de escalonamento pode ser estendido a uma sequência que termina na matriz identidade.*

Matriz escalonada reduzida

Escalona a matriz dada

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{E_{1,3}})$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-3) L_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{E_{2,(-3),1}})$$

Matriz escalonada reduzida

Normaliza os pivôs

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow (3)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{E}_{(3),1})$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow (-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{E}_{(-1),2})$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow (\frac{1}{3})L_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{E}_{(1/3),3})$$

Matriz escalonada reduzida

Retroescalona a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{E}_{\mathbf{2},(-\mathbf{2}),\mathbf{3}})$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + (-6)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{E}_{\mathbf{1},(-\mathbf{6}),\mathbf{2}})$$

UFABC

Observemos que...

... no último exemplo

$$\mathbf{E}_{1,(-6),2}\mathbf{E}_{2,(-2),3}\mathbf{E}_{(1/3),3}\mathbf{E}_{(-1),2}\mathbf{E}_{(3),1}\mathbf{E}_{2,(-3),1}\mathbf{E}_{1,3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1/3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_3$$

portanto

$$\mathbf{E}_{1,(-6),2}\mathbf{E}_{2,(-2),3}\mathbf{E}_{(1/3),3}\mathbf{E}_{(-1),2}\mathbf{E}_{(3),1}\mathbf{E}_{2,(-3),1}\mathbf{E}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1/3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{cases} 0x + 0y + 3z = 9 \\ x + 5y - 2z = 2 \\ \frac{1}{3}x + 2y + 0z = 3 \end{cases} \quad \text{tem forma matricial} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e a inversa da matriz dos coeficientes é

$$\mathbf{E}_{1,(-6),2}\mathbf{E}_{2,(-2),3}\mathbf{E}_{(1/3),3}\mathbf{E}_{(-1),2}\mathbf{E}_{(3),1}\mathbf{E}_{2,(-3),1}\mathbf{E}_{1,3}$$

portanto, multiplicando pela inversa a esquerda nos 2 lados do "="

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{1,(-6),2}\mathbf{E}_{2,(-2),3}\mathbf{E}_{(1/3),3}\mathbf{E}_{(-1),2}\mathbf{E}_{(3),1}\mathbf{E}_{2,(-3),1}\mathbf{E}_{1,3}\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e, da matriz escalonada, obtemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

§4 Solução de sistema de equações lineares

UFABC

Matriz aumentada de um sistema linear

Operações elementares e Sistemas equivalentes

O conjunto solução de $AX = B$ é invariante pelas operações elementares nas equações do sistema.

Dois sistemas lineares com o mesmo número de incógnitas são **equivalentes** se tiverem exatamente o mesmo conjunto solução.

Matriz aumentada de um sistema linear

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

Matriz aumentada

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} & b_n \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada escalonada

Se $[A|B] \leftrightarrow [C|D]$ então $AX = B$ e $CX = D$ são equivalentes.

Variáveis livres

Seja R a matriz escalonada da matriz aumentada $M = [A|B]$.

As colunas de R e M, exceto a última, correspondem às incógnitas do sistema.

Uma incógnita associada a um coluna de R **sem pivô** é dita variável livre.

Variáveis livres

No caso das variáveis $x_1, \ldots, x_6$ na matriz aumentada escalonada

$$R = \begin{bmatrix} * & - & 0 & 0 & - & 0 & - \\ 0 & 0 & * & 0 & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & * & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos x_2 e x_4 **livres**.

Método para solução

$AX = B$ sistema com n equações e m incógnitas

Sejam

1. $AX = B$ sistema com n equações e m incógnitas;
2. $M \in \mathbb{R}^{n \times m+1}$ sua matriz aumentada e
3. R a matriz escalonada obtida de a partir de M.

Há 2 possibilidades para a última coluna de R:

UFABC

Método

$AX = B$ sistema com n equações e m incógnitas

(1) R tem pivô na coluna $m+1$:
O sistema equivalente tem uma equação da forma $0 = b$ com $b \neq 0$, logo não tem solução. Portanto o sistema original também não tem solução.

Método

$AX = B$ sistema com n equações e m incógnitas

(2) R **não** tem pivô na coluna $m+1$:
O sistema tem p pivôs, com $p \leqslant m$.

Há duas possibilidades de acordo com a quantidade de pivôs: $p = m$ ou $p < m$.

UFABC

Método

$AX = B$ sistema com n equações e m incógnitas

(2a) $p = m$:
O sistema equivalente tem uma única solução, obtida resolvendo-se o sistema de baixo para cima. Obtém-se x_m, que é substituído na equação acima e da qual resulta x_{m-1}, e assim por diante. O sistema original tem a mesma solução.

Professor: jair.donadelli@ufabc.edu.br *Sala*: 546-2-A

Método

$AX = B$ sistema com n equações e m incógnitas

(2b) $p < m$:
O sistema equivalente tem infinitas soluções.
Para cada atribuição de valor para cada uma das $m - p$ variáveis livres corresponde uma solução do sistema equivalente, obtida pelo método (2a).
Assim atribuem-se `parâmetros` às variáveis livres e escrevem-se as outras variáveis em função desses parâmetros.

UFABC

Sistemas Homogêneos

Um sistema da forma $AX = \mathbf{0}$ é dito homogêneo.

Um sistema homogêneo é sempre possível, pois $X = \mathbf{0}$ é solução, dita trivial.

Já provamos que se A é inversível a solução trivial é única.

De volta a Inversão de matriz

vale a recíproca da Proposição 3

Proposição 6

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é inversível então $A \leftrightarrow \mathrm{I}_n$.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversível implica $AX = \mathbf{0}$ admite só a solução $X = \mathbf{0}$.

Então $[A|\mathbf{0}]$ é linha equivalente a $[\mathrm{I}_n|\mathbf{0}]$.

Ademais se, $E_k E_{k-1} \dots E_1 A = \mathrm{I}_n$ então $A = E_1^{-1} \dots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$. ♦

Sistemas Homogêneos

Teorema 4

Um sistema homogêneo com mais incógnitas que equações é indeterminado.

Demonstração.

Se são n equações e m incógnitas então a matriz aumentada escalonada tem $p \leqslant \min\{n, m\} = n$ pivôs

Como $p < m$, a última coluna não tem pivô, pois o sistema é homogêneo. Esse é o caso (2b). ♦

UFABC

Até aqui, sabemos que

Teorema 3

Para toda matriz quadrada A de ordem n, são equivalentes:

1. $A \leftrightarrow \mathrm{I}_n$.
2. A é produto de matrizes elementares.
3. A é invertível.
4. $AX = B$ é possível e determinado para todo $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.
5. $AX = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

♦

UFABC

Corpo

Observação

Tudo o que foi feito continua valendo se, ao invés de tomarmos os coeficientes/escalares em $\mathbb{R}$, usarmos um corpo $\mathbb{K}$.

São exemplos de corpos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}$. Não são corpos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

Definição de Corpo

Um corpo $\mathbb{K}$ é definido por um conjunto não vazio com duas operações binárias, adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, satisfazendo os seguintes axiomas:

Definição de Corpo

- **(Fechamento)** $\forall a, b \in \mathbb{K}, a + b \in \mathbb{K}$ e $a \cdot b \in \mathbb{K}$.
- **(Axiomas do Grupo Aditivo)**
  - (Associatividade) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
  - (Elemento Neutro) $\exists 0_K \in \mathbb{K}, \forall a \in \mathbb{K}, a + 0_K = a$.
  - (Elemento Oposto) $\forall a \in \mathbb{K}, \exists (-a) \in \mathbb{K}$ tal que $a + (-a) = 0_K$.
  - (Comutatividade) $a + b = b + a$.

Definição de Corpo

- **(Axiomas do Grupo Multiplicativo)**
  - (Associatividade) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  - (Elemento Neutro) $\exists 1_K \in \mathbb{K}, 1_K \neq 0_K, \forall a \in \mathbb{K}, a \cdot 1_k = a$.
  - (Elemento Inverso) $\forall a \neq 0_K, \exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1_k$.
  - (Comutatividade) $a \cdot b = b \cdot a$.
- **(Distributividade)** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Exercício

Verifique que o conjunto $\{0, 1\}$ com as operações dadas abaixo é um corpo.

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

obs: $+$ é o `xor` de bits e $\cdot$ o `and` de bits.