Sumário

UFABC

§8 — Dependência linear

Dependência linear

Para $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ a equação vetorial

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_i \vec{v}_i + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

sempre vale para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Se há outra solução, então existe i tal que $\alpha_i \neq 0$, logo

$$\vec{v}_i = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_i}\right) \vec{v}_1 + \cdots + \left(\frac{-\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right) \vec{v}_{i-1} + \left(\frac{-\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right) \vec{v}_{i+1} + \cdots \left(\frac{-\alpha_n}{\alpha_i}\right) \vec{v}_n$$

Dependência linear

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ **não vazio** é **linearmente dependente** (l.d.) se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ **não todos nulos** tais que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_i \vec{v}_i + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Caso contrário $S \subset \mathcal{V}$ é **linearmente independente** (l.i.).

Equivalentemente ...

Conjunto LI

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ é **linearmente independente** se

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_i\vec{v}_i + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_i = \cdots = \alpha_n = 0$$

caso contrário, é **linearmente dependente**

Combinação linear trivial

A combinação linear

$$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$$

é chamada de combinação linear trivial.

UFABC

Exemplos

$\{1 + x - 2x^2,\ 2 + 5x - x^2,\ x + x^2\}$ é l.d. no $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$\alpha(1 + x - 2x^2) + \beta(2 + 5x - x^2) + \gamma(x + x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta + \gamma = \mathbf{0} \end{cases}$$

UFABC

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}t,\ \beta = -\frac{1}{3}t,\ \gamma = t\ (t \in \mathbb{R}).$$

Por exemplo, $t = 3$, temos a c.l. entre os polinômios dados

$$2 + 5x - x^2 = 2(1 + x - 2x^2) + 3(x + x^2).$$

UFABC

Exemplos

$\{(1,-2),(3,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ é l.i.

$\{(1,-2),(3,1),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ é l.d.

$\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é l.i.

$\{\cos(x),\sin(x)\}$ é l.i. em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Exemplos

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ no $\mathbb{R}^2$ é l.d.

Escreva $\vec{v}_i = (v_{i,1}, v_{i,2})$ e tome $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$. Então temos

$$\begin{cases} \alpha_1 v_{1,1} + \alpha_2 v_{2,1} + \alpha_3 \vec{v}_{3,1} = 0 \\ \alpha_1 v_{1,2} + \alpha_2 v_{2,2} + \alpha_3 \vec{v}_{3,2} = 0 \end{cases}$$

que é possível indeterminado (Teorema 4), portanto, tem soluções não triviais.

Exercício

Mais que n vetores tomados no $\mathbb{R}^n$ formam um conjunto l.d..

Caracterização de conjuntos LD

Proposição 7

$S \subset \mathcal{V}$ finito com $|S| \geqslant 2$ é l.d. se, e só se, algum vetor de S pode ser escrito como combinação linear dos *outros* vetores de S.

Esclarecendo "algum vetor de S pode ser escrito como c.l. dos *outros* vetores de S":

Pondo $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, existe i tal que $\vec{v}_i \in [S \setminus \{\vec{v}_i\}]$.

Propriedades

Proposição 8

1. Se $\vec{0} \in S$ então S é l.d..
2. Se S é l.i. então todo $U \subseteq S$ é l.i..
3. Se S é l.d. então todo $U \supseteq S$ é l.d.

UFABC

Propriedades

Teorema 10

Sejam $\mathcal{V}$ espaço vetorial, $S \subset \mathcal{V}$ não vazio e $\vec{v} \in \mathcal{V}$.

1. Se S é l.i. e $\vec{v} \notin [S]$ então $S \cup \{\vec{v}\}$ é l.i..
2. Se S é l.d. e $\vec{u} \in S$ é c.l. dos outros vetores de S, então $[S] = [S \setminus \{\vec{u}\}]$.

Exemplo

Em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ temos $\{1 - x^2, 2 - x^2\}$ l.i.,

pois um polinômio não é múltiplo do outro.

x^3 não pode ser escrito como c.l. desses dois polinômios.

Portanto $\{1 - x^2, 2 - x^2, x^3\}$ é l.i.

UFABC

§9 — Base e dimensão

Seja $\mathcal{V}$ um e.v. finitamente gerado e $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ um gerador.

Se S é l.d. então, para algum i, $\vec{v}_i \in [S \setminus \{\vec{v}_i\}]$.

Logo, $[S] = [S \setminus \{\vec{v}_i\}]$.

Se $S \setminus \{\vec{v}_i\}$ é l.d. então, para algum $j \neq i$, $\vec{v}_j \in [S \setminus \{\vec{v}_i, \vec{v}_j\}]$ e

$[S] = [S \setminus \{\vec{v}_i, \vec{v}_j\}]$.

Se $S \setminus \{\vec{v}_i, \vec{v}_j\}$ é l.d. ... $[S] = [S \setminus \{\vec{v}_i, \vec{v}_j, \vec{v}_k\}]$ ...

S é **finito**, logo a repetição desse processo termina.

Quando termina, temos subconjunto B de S.

Pela construção, B é l.i. e $[B] = [S]$.

UFABC

Base

Um conjunto $B \subset \mathcal{V}$ **finito** é **base** de $\mathcal{V}$ se

1. B é l.i.
2. B é gerador de $\mathcal{V}$.

Espaços finitamente gerados

Teorema 11

Se $\mathcal{V}$ é finitamente gerado então $\mathcal{V}$ admite uma base.

UFABC

Exemplo

bases canônicas

$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$, chamada base canônica.

Os vetores unitários canônicos

$$\vec{e}_1 = (1,0,0,\dots,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ \vec{e}_n = (0,0,0,\dots,1)$$

geram o $\mathbb{R}^n$ e são l.i. (verifique). Esses vetores formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

UFABC

Exemplo

bases canônicas

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\} \text{ é a base canônica do } \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

$\{1, x, x^2, x^3\}$ é a base canônica do $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Qual a base canônica do $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$?

UFABC

Exemplo

$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é gerado por $\{1+x, x+2x^2, 1-x^2\}$:

Dados $a, b, c, \in \mathbb{R}$, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1+x) + \beta(x+2x^2) + \gamma(1-x^2) = ax^2 + bx + c$$

se, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}$ tem solução.

O sistema é possível determinado. Portanto é gerador.

Exemplo

$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é gerado por $\{1+x, x+2x^2, 1-x^2\}$. É l.i.?

a equação vetorial

$$\alpha(1+x)+\beta(x+2x^2)+\gamma(1-x^2)=0$$

corresponde ao sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Que tem só a solução trivial (Teorema 5), logo l.i.

Exemplo

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 3y - 5z = 0\}.$$

$(a,b,c) \in \mathcal{H}$ se e só se $a + 3b - 5c = 0$ se e só se $a = 5c - 3b$

$$(5c - 3b, b, c) = (5c, 0, c) + (-3b, b, 0) = c \cdot (5,0,1) + b \cdot (-3,1,0)$$

Portanto $\mathcal{H} = [\{(5,0,1),(-3,1,0)\}]$,

$\{(5,0,1),(-3,1,0)\}$ é l.i., logo é base.

$|\{\text{l.i.}\}| \leqslant |\{\text{gerador}\}|$

Proposição 9

Em um espaço vetorial finitamente gerado,
se o subconjunto L é l.i. e o subconjunto G é gerador, então

$$|L| \leqslant |G|.$$

Professor: jair.donadelli@ufabc.edu.br *Sala*: 546-2-A

Demonstração

Sejam $L = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ l.i. e $G = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ gerador.

Assuma $m > n$.

Existem escalares α_{ij} tais que

$$\vec{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\vec{w}_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

UFABC

Demonstração

No sistema linear homogêneo $[\alpha_{ji}][x_i] = \vec{0}$:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \cdots + \alpha_{m1}x_m = 0, \\ \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{m2}x_m = 0, \\ \qquad \vdots \\ \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_m = 0. \end{cases}$$

temos m incógnitas $> n$ equações. É possível indeterminado (Teorema 4).

Demonstração

Tome $x_1 = \beta_1$, $x_2 = \beta_2 \ldots x_m = \beta_m$ uma solução não trivial.

Considere a c.l. dos vetores de L com escalares $\beta_1, \ldots, \beta_m$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \vec{w}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_{ij} \right) \vec{w}_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \vec{w}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_{ij} \right)}_{=0} \vec{w}_j = \vec{0}$$

contrariando o fato de $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ ser l.i.

Teorema do completamento

Exercício — Teorema do completamento

Prove que se $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é l.i. num espaço vetorial $\mathcal{V}$ finitamente gerado, então existe uma base B de $\mathcal{V}$ que contém o conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$.

Resumindo

São consequências do último teorema e último exercício

1. Todo gerador pode ser reduzido a uma base.

   Formalmente, todo subconjunto gerador contém uma base.

2. Todo l.i. pode ser estendido a uma base.

   Formalmente, todo subconjunto l.i. está contido em uma base.

UFABC

Dimensão

Teorema 12

Se B e C são bases de $\mathcal{V}$ finitamente gerado, então $|B| = |C|$.

Corolário do Teorema 12

Seja S um subconjunto de vetores de um espaço vetorial onde toda base tem n vetores.

1. Se S é l.i. então $|S| \leqslant n$; se vale a igualdade, S é base.
2. Se S gera $\mathcal{V}$ então $|S| \geqslant n$; se vale a igualdade, S é base. ♦

Dimensão

Seja $\mathcal{V}$ um espaço de dimensão finita.

Se $\mathcal{V} \neq \{\vec{0}\}$, a dimensão de $\mathcal{V}$, denotada $\dim(\mathcal{V})$, é a cardinalidade de uma base qualquer de $\mathcal{V}$.

Se $\mathcal{V} = \{\vec{0}\}$, a convenção é que $\dim(\mathcal{V}) = 0$.

Todo subespaço de $\mathcal{V}$ tem dimensão finita?

Exemplos

A dimensão de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é 3.

A dimensão de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é $n+1$.

A dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n.

A dimensão de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é 4.

A dimensão de $\mathbb{R}^{m\times n}$ é $m \cdot n$.

A dimensão de $\mathcal{H} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 3y - 5z = 0\big\}$ é 2.

Exemplo

Dimensão de subespaço das soluções de $AX = 0$

Qual a dimensão do espaço vetorial das soluções de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 5/3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 14/3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 14/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tem solução geral: $t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{14}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

O subespaço tem dimensão 1.

Exemplo

Dimensão de subespaço das soluções de $AX = 0$

Qual a dimensão do espaço vetorial das soluções de

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ? \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$ $(s, t \in \mathbb{R})$, a dimensão é 2 (os vetores são l.i.).

Exercícios

Dimensão de subespaço das soluções de $AX = 0$

1. Mostre que se a matriz A pode ser obtida por operações elementares nas linhas da matriz B, então cada linha de A é combinação linear das linhas de B.
2. Seja R matriz escalonada obtida a partir de A. Relacione a quantidade de pivôs de R com o tamanho de um conjunto gerador do subespaço de soluções de $RX = \mathbf{0}$.
3. Prove que o espaço vetorial das soluções de $AX = \mathbf{0}$, em que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, é um subespaço de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ de dimensão $n - p$ onde p é a quantidade de pivôs de uma matriz escalonada obtida de a partir de A.

UFABC

Dimensão de subespaços

Teorema 13

Um subespaço $\mathcal{W}$ de um espaço de dimensão finita $\mathcal{V}$ também tem dimensão finita. Ademais, $\dim(\mathcal{W}) \leqslant \dim(\mathcal{V})$ com igualdade se e só se $\mathcal{W} = \mathcal{V}$.