## Exercícios da semana 1

(1) Aqui, o uso de aspas simples (' ') é uma convenção para distinguir quando de menciona a expressão de quando se fala dela. Identifique abaixo o uso correto ou não dessa convenção

(a) O numeral '3' expressa o resultado da operação 2+1.
(b) '2' é o numeral que dá nome ao número 2.
(c) 2+2 é igual a 3+1 mas '2+2' não é igual a '3+1'.
(d) A expressão 'rosa' permite falar sobre a rosa.
(e) 'Dois' não é o nome de 1+1, mas o nome de 2.
(f) 'Sócrates' é o nome de um filósofo grego.
(g) Sócrates é o nome de um ex-jogador do Corinthians.
(h) O nome da rosa é 'rosa' e tem quatro letras na língua portuguesa.
(i) 'The house is blue' é diferente de 'Das Haus ist blau' e ambas são diferentes de 'La masion est bleu'.
(j) A rosa é vermelha. A expressão 'rosa' permite afirmar sobre a rosa.
(k) A sentença 'A sentença 'A neve é branca' é verdadeira' é uma expressão da metalinguagem.
(l) Haus é a palavra casa na língua alemã e house é a palavra casa na língua inglesa. As duas palavras são diferentes. Na língua francesa, tem-se a palavra maison.

(2) Queremos com uma linguagem simbólica capturar formas de dedução ou argumentação de modo que há situações descritas em linguagem natural que queremos simbolizar na linguagem formal. Por exemplo, denominando as sentenças atômicas conforme abaixo

- $p$ : O time joga bem
- $q$ : O time ganha o campeonato.
- $r$ : O técnico é o culpado.
- $s$ : Os torcedores estão felizes.

escrevemos as sentenças compostas

- $p \to q$ : Se o time joga bem, então ganha o campeonato.
- $(\neg p) \to r$ : Se o time não joga bem, então o técnico é o culpado.
- $q \vee \neg s$ : O time ganha o campeonato ou os torcedores não ficam felizes.

Escreva as seguintes frases como fórmulas bem formadas da linguagem da lógica proposicional usando símbolos proposicionais para as frases atômicas. Para fazer alguns dos itens será necessário pesquisar[3] como os termos "necessário", "suficiente", "necessário e suficiente", "somente se" são traduzidos para os conectivos lógicos.

[3] o livro do Hegenberg de Lógica e o livro de Matemática Discreta do Rosen são lugares pra se começar.

(a) Se há motivação para o estudo, então o estudante estuda muito ou não aprende a matéria.
(b) Se o estudante estuda muito, então, se não há motivação para o estudo, o estudante não aprende a matéria.
(c) Não há motivação para o estudo se, e somente se, o estudante estuda muito e não aprende a matéria.
(d) Se o Sr. Jones está feliz, Sra. Jones não está feliz, e se o Sr. Jones não é feliz, Sra. Jones não é feliz.
(e) Ou Sam virá para a festa e Max não vai, ou Sam não vai vêm para a festa e Max vai se divertir.
(f) Uma condição suficiente para $x$ ser estranho é que $x$ seja primo.
(g) Uma condição necessária para uma sequência de números reais convergir é ser limitada.
(h) A condição necessária e suficiente para o homem ser feliz é ter vinho e música.
(i) Schrek vai ao cinema somente se estiver passando uma comédia.
(j) O suborno será pago se e somente se as mercadorias são entregues.
(k) Karpov vai ganhar o torneio de xadrez, a menos que Kasparov vença hoje.

(3) Adicione parênteses nas seguintes expressões de modo que fiquem fórmulas bem formadas (não é necessário seguir as regras de omissão de parênteses). Quando houver mais de uma possibilidade, faça pelo menos duas delas.

(a) $\neg p \to q$
(b) $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$
(c) $p \to q \to r \to p \wedge q \wedge r$
(d) $\neg \alpha \vee \alpha$
(e) $\neg(\neg\neg\neg\alpha \wedge \beta)$
(f) $\alpha \to \alpha \vee (\beta \to \gamma)$

(4) Para as fórmulas bem formadas encontradas no exercício anterior, determine todas as subfórmulas. (As subfórmulas dependem do modo que os parênteses foram colocados?)

(5) (***Comprimento*** *de uma fórmula*) Use a indução para fórmulas e defina a função $\ell\colon \mathscr{L}_0 \to \mathbb{N}$, para toda fórmula $\alpha$ da linguagem $\mathscr{L}_0$ da lógica proposicional. Chamamos $\ell(\alpha)$ de comprimento da fórmula $\alpha$ e expressa o número de símbolos da fórmula que não são de pontuação. Por exemplo $\ell((\neg p_1)) = \{2\}$, $\ell((p_1 \vee p_2)) = 3$, $\ell((p_1 \wedge (p_1 \to p_2) \vee (\neg p_2))) = 8$.

(6) Demonstre que para toda fórmula $\alpha$ vale que grau$(\alpha)$ é no máximo o número de conectivos lógicos que aparecem em $\alpha$. Demonstre também que grau$(\beta) <$ grau$(\alpha)$ para toda subfórmula própria $\beta$ da fórmula $\alpha$.

(7) Leia com atenção a descrição das regras para a omissão de parênteses e refaça o exercício 3 tendo em mente que os parênteses das fórmulas foram omitidos de acordo com a descrição acima.

(8) A altura de uma árvore de formação é o maior número de passos que se dá a partir da raiz até uma das folhas. Por exemplo, na árvore da figura 1 a altura é 3. Dê uma definição recursiva para a função $\mathrm{alt}(\alpha)$ que é a altura da árvore de formação de $\alpha$.

(9) Prove usando indução que $\mathrm{alt}(\alpha) < \ell(\alpha)$ (definido no exercício 5).