

EXERCÍCIOS

(1) Verifique que $w(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 - |w(\alpha) - w(\beta)|$.

(2) Verifique que

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \leftrightarrow \gamma}{\gamma \rightarrow \beta}$$

(3) Tome uma valoração w tal que $w(p_4) = w(p_2) = 1$ e $w(p_1) = w(p_3) = 0$. Determine, sem usar tabela-verdade, $w(\alpha)$ quando α é dada por

(a) $\neg p_2 \rightarrow p_3$.

(b) $\neg p_4 \vee p_1$.

(c) $\neg(p_4 \wedge \neg p_1)$.

(4) Mostre que as fórmulas abaixo são tautologias sem construir uma tabela-verdade.

(a) $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$

(c) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(b) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(d) $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

(5) Para cada fórmula a seguir, escreva uma fórmula que seja logicamente equivalente à negação da fórmula mas que só ocorra símbolos atômicos negados (o exercício anterior pode ser útil).

(a) $(p \wedge q) \rightarrow r$

(d) $p \vee (q \wedge (r \vee s))$

(g) $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$

(b) $p \rightarrow (p \wedge q)$

(e) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(h) $p \vee (q \rightarrow r)$

(c) $p \leftrightarrow (q \vee r)$

(f) $\neg p \rightarrow (q \vee r)$

(i) $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$

(6) Escreva a negação das seguintes sentenças da língua portuguesa.

(a) Se a canoa não virar então eu chego lá.

(b) Se eu fizer faculdade, eu vou cursar Matemática ou Física.

(c) Se chover ou fizer frio, eu vou ficar em casa ou vou para o cinema.

(d) Se eu estudar física, eu não vou estudar história, a menos que eu também estude português.

(e) Eu não ouço Beethoven quando leio Kafka, a menos que esteja chovendo e eu esteja deprimido.

(7) Se $((\phi \rightarrow \tau) \wedge (\phi \rightarrow \neg\tau))$ é uma tautologia então o que pode ser dito a respeito do valor-verdade de ϕ ?

(8) Verifique a equivalência

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n$$

para todo natural $n \geq 1$.

(9) O conectivo lógico c é **definível** a partir dos conectivos c_1, c_2, \dots, c_k se a fórmula $p c q$ é semanticamente equivalente a uma fórmula escrita com os conectivos c_1, c_2, \dots, c_k e só envolve os átomos proposicionais p e q . Por exemplo, os conectivos \vee, \rightarrow e \leftrightarrow são definíveis a partir de \neg e \wedge pois

$$(a) \quad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$(c) \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

$$(b) \quad p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

(a) Mostre que os conectivos \vee, \wedge e \leftrightarrow são definíveis a partir de \neg e \rightarrow .

(b) Mostre que os conectivos \vee, \rightarrow e \leftrightarrow são definíveis a partir de \neg e \wedge .

(c) Mostre que os conectivos \wedge, \rightarrow e \leftrightarrow são definíveis a partir de \neg e \vee .

(10) O nand, denotado por \otimes , é um conectivo lógico que satisfaz $w(p \otimes q) = 1 - \min(w(p), w(q))$ em qualquer valoração w , ou seja, tem a seguinte interpretação:

$w(p)$	$w(q)$	$w(p \otimes q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Mostre que todos os outros conectivos ($\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$) são definíveis a partir do nand.

(11) Sejam w uma interpretação para \mathcal{L}_0 e $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ um subconjunto de fórmulas de \mathcal{L}_0 .

(a) Se $w \models \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ então $w \models \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$

(b) Se $w \models \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ então $w \models \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$?

(12) Responda com justificativa:

(a) Se $\Gamma \models \phi \vee \tau$ então $\Gamma \models \phi$ e $\Gamma \models \tau$?

(b) Se $\Gamma \models \phi$ e $\Gamma \models \tau$ então $\Gamma \models \phi \wedge \tau$?

(13) (Enderton) Você está em uma terra habitada por pessoas que sempre dizem verdades ou sempre falam falsidades. Você chega numa bifurcação na estrada e você precisa saber qual das dois caminhos leva à capital. Há um nativo nas proximidades, mas ele tem tempo apenas para responder a uma pergunta sim-ou-não. O que você pergunta para ele a fim de saber por qual estrada seguir?