2. UM SISTEMA DEDUTIVO PARA A LÓGICA PROPOSICIONAL

Da literatura conhecemos alguns sistemas dedutivos para a linguagem proposicional como os Sistemas Axiomáticos de Hilbert, a Dedução Natural, os Tableaux Semânticos e o Cálculo de Sequentes de Gentzen. Eles são equivalentes no sentido de deduzirem as mesmas fórmulas da lógica proposicional. Cada um deles foi proposto com um propósito, por exemplo, a dedução natural pretende modelar o modo como deduzimos usando raciocínio lógico, o sistema de Gentzen mecaniza mais o processo e é o predileto em Teoria da Prova.

Estudaremos a seguir um sistema axiomático do tipo *Sistema de Hilbert* para a lógica proposicional. Ele contém um conjunto (finito) de axiomas e uma única regra de inferência. Provas são construídas como uma sequência de fórmulas, cada uma das quais é ou um axioma, ou uma fórmula que tenha sido anteriormente provada, ou uma derivação de uma fórmula de fórmulas anteriores na sequência usando a regra de inferência. As deduções nesse tipo de sistema são mais difíceis porém facilita-se o estudo das propriedades (metateoremas) do sistema dedutivo, que é o nosso principal objetivo agora.

Usaremos letras gregas maiúsculas

$$\Sigma, \Gamma, \Theta, \Omega, \dots$$

para denotar conjuntos de fórmulas de $\mathscr{L}_0$.

2.1. **Axiomas.** No que segue, chamaremos de *axioma* e de *teorema* uma fórmula como as seguintes

$$\alpha \to (\beta \to \alpha) \tag{1}$$

$$\alpha \to \alpha \tag{2}$$

o que, a rigor, não são como já dissemos na seção 1.2. São *esquemas de axiomas* e *esquemas de teoremas*, pois usam variáveis da metalinguagem. Os axiomas são obtidos quando substituímos tais variáveis por fórmulas nas quais figuram apenas símbolos do alfabeto $\mathscr{A}_0$, sendo que todas as ocorrências da mesma variável correspondem a mesma fórmula da linguagem.

Exemplo 12. A FBF $((p_1 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_3) \to (\neg(p_2 \wedge \neg p_3) \to ((p_1 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_3))$ é uma das fórmulas do esquema (1), isto é, é um dos axiomas

$$\underbrace{((p_1 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_3)}_{\alpha} \to (\underbrace{\neg(p_2 \wedge \neg p_3)}_{\beta} \to \underbrace{((p_1 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_3)}_{\alpha})$$

e $((p_1 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_3) \to ((p_1 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_3)$ é uma fórmula do esquema (2)

$$\underbrace{((p_1 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_3)}_{\alpha} \to \underbrace{((p_1 \vee \neg p_2) \leftrightarrow p_3)}_{\alpha}$$

Os axiomas (ou esquemas de axiomas) que adotaremos para o sistema dedutivo, conhecido como sistema de Kleene e denotando neste texto por K, é o seguinte (com omissões de parênteses)

(A1): $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
(A2): $(\alpha \to (\beta \to \xi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \xi))$
(A3): $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$
(A4): $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
(A5): $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
(A6): $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
(A7): $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
(A8): $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
(A9): $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
(A10): $\neg\neg\alpha \to \alpha$

2.2. **Regra de inferência.** O sistema formal de Kleene tem apenas uma regra de inferência, a *Modus Ponens*:

(MP): $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$

que deve ser entendida como: de α e $\alpha \to \beta$ deduzimos (inferimos, provamos) β.

Na prática dedutiva isso significa que se numa prova, que definiremos a seguir, ocorre a fórmula α e ocorre a fórmula $\alpha \to \beta$ então podemos usar a fórmula β.

Modus ponens é uma abreviação de *modus ponendo ponens*, frase em latim para "o modo que afirma afirmando".

2.3. **Dedução.** Sejam $\alpha \in \mathscr{L}_0$ e $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_0$. Uma **prova** de α a partir de Γ é uma sequência finita de fórmulas

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$$

tal que $\varphi_n = \alpha$ e, para cada $i < n$, φ_i é

(1) ou um axioma
(2) ou uma fórmula de Γ
(3) ou uma fórmula obtida de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$ por regra de inferência.

Nesse caso dizemos que Γ **prova** α, ou α é **deduzível** de Γ e usamos a notação

$$\Gamma \vdash \alpha.$$

As vezes, também dizemos que α é **consequência sintática** de Γ. Chamamos Γ de antecedentes ou **hipóteses iniciais** e α de consequente ou **conclusão**.

Se α é consequência sintática dos axiomas (isto é, $\Gamma = \varnothing$) então escrevemos

$$\vdash \alpha$$

e nesse caso dizemos que α é um **teorema lógico**. Em particular, se α é um axioma, então também é um teorema lógico.

2.4. **Simplificações de notação.**

- Ao invés de $\{\alpha\} \vdash \beta$ escrevemos $\alpha \vdash \beta$.
- Ao invés de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$ escrevemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$.
- Ao invés de $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ escrevemos $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

2.5. **Exemplos de dedução.** Usualmente, escrevemos uma prova para $\Gamma \vdash \varphi_n$ da seguinte forma

Prova.

1.	φ_1	`[justificativa]`
2.	φ_2	`[justificativa]`
	$\vdots$	
n-1.	φ_{n-1}	`[justificativa]`
n.	φ_n	`[justificativa]`

A `justificativa` diz explicitamente como foi obtida a fórmula daquela linha.

TEOREMA 13 $\vdash \alpha \to \alpha$

Prova.

1.	$\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha))$	(por A1)
2.	$(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$	(por A2)
3.	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$	(MP 1,2)
4.	$\alpha \to (\alpha \to \alpha))$	(por A1)
5.	$\alpha \to \alpha$	(MP 3,4)

TEOREMA 14 $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

Prova.

1.	$\alpha \to \beta$	(por hipótese)
2.	$\beta \to \gamma$	(por hipótese)
3.	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	(por A1)
4.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)$	(por MP 2,3)
5.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	(por A2)
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	(por MP 4,5)
7.	$\alpha \to \gamma$	(por MP 1,6)

TEOREMA 15 $\theta \to (\phi \to \xi) \vdash \phi \to (\theta \to \xi)$

Prova.

1.	$\theta \to (\phi \to \xi)$	(por hipótese)
2.	$\big(\theta \to (\phi \to \xi)\big) \to \big((\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)\big)$	(por A2)
3.	$\phi \to (\theta \to \phi)$	(por A1)
4.	$(\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)$	(por MP 1,2)
5.	$\big((\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)\big) \to \big(\phi \to \big((\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)\big)\big)$	(por A1)
6.	$\phi \to \big((\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)\big)$	(por MP 3,5)
7.	$\big(\phi \to \big((\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)\big)\big) \to$ $\big(\big(\phi \to (\theta \to \phi)\big) \to \big(\phi \to (\theta \to \xi)\big)\big)$	(por A2)
8.	$\big(\phi \to (\theta \to \phi)\big) \to \big(\phi \to (\theta \to \xi)\big)$	(por MP 6,7)
9.	$\phi \to (\theta \to \xi)$	(por MP 4,5)

Notemos que as linhas 1–7 da prova do teorema 14 são "iguais" às linhas 3–9 na prova do teorema 15. De fato, na linha 3 temos $\phi \to (\theta \to \phi)$ e na 4 temos $(\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)$; o que precisamos agora é concluir que $\phi \to (\theta \to \xi)$, que é essencialmente o que o teorema 14 faz. Troque no teorema 14 toda ocorrência de α por ϕ, de β por $\theta \to \phi$ e de γ por $\theta \to \xi$ e temos o resultado esperado.

Para evitar esse trabalho extra permitimos que se justifique passos de uma prova com teoremas já provados. Para dar um exemplo, a prova acima é re-escrita abaixo.

1.	$\theta \to (\phi \to \xi)$	(por hipótese)
2.	$\big(\theta \to (\phi \to \xi)\big) \to \big((\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)\big)$	(por A2)
3.	$\phi \to (\theta \to \phi)$	(por A1)
4.	$(\theta \to \phi) \to (\theta \to \xi)$	(por MP 1,2)
5.	$\phi \to (\theta \to \xi)$	(pelo Teo. 14 3,4)

O próximo resultado também permite o mesmo atalho. Nas linhas 8–14 da prova a seguir também fazem o mesmo serviço do teorema 14. Pode-se verificar isso trocando na prova do teorema 14 toda ocorrência de α por $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$, de β por $\neg\neg\alpha$ e de γ por α.

TEOREMA 16 $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha \vdash \alpha$

Prova.

1.	$\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$	(por hipótese)
2.	$\neg\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)$	(por A1)
3.	$(\neg\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)) \to$ $((\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha))$	(por A2)
4.	$\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)$	(por A1)
5.	$(\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)$	(por MP 2,3)
6.	$\neg\alpha \to \neg\alpha$	(por MP 4,5)
7.	$(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg\alpha)$	(por A3)
8.	$(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$	(por MP 6,7)
9.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	(por A10)
10.	$((\neg\neg\alpha) \to \alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\neg\alpha) \to \alpha))$	(por A1)
11.	$((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\neg\alpha) \to \alpha)$	(por MP 9,10)
12.	$((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\neg\alpha) \to \alpha)) \to$ $(((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha)) \to ((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \alpha))$	(por A2)
13.	$((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha)) \to ((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \alpha)$	(por MP 11,12)
14.	$(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \alpha$	(por MP 8,13)
15.	α	(por MP 1,14)

Notemos que as linhas 1–7 da prova do teorema 14 são "iguais" às linhas 8–14 na prova do teorema 16; troque no teorema 14 toda ocorrência de α por $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$, de β por $\neg\neg\alpha$ e de γ por α. Para evitar esse trabalho extra permitimos que se justifique passos de uma prova com teoremas já provados. Para dar um exemplo, a prova acima é re-escrita abaixo.

Prova do teorema 16.

1. $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$ (por hipótese)
2. $\neg\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)$ (por A1)
3. $(\neg\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)) \to$
   $((\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha))$ (por A2)
4. $\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)$ (por A1)
5. $(\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha)$ (por MP 2,3)
6. $\neg\alpha \to \neg\alpha$ (por MP 4,5)
7. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg\alpha)$ (por A3)
8. $(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$ (por MP 6,7)
9. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ (por A10)
10. $(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \alpha$ (pelo Teo. 14 em 8,9)
11. α (por MP 1,14)

TEOREMA 17 $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

Prova.

1. $\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$ (por A10)
2. $(\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \big((\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\neg\neg\alpha\big)$ (por A3)
3. $(\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \big((\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\neg\neg\alpha\big)$ (pelo Teo. 15 em 2)
4. $(\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\neg\neg\alpha$ (por MP 1,3)
5. $\neg\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$ (por A10)
6. $(\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha$ (pelo Teo. 14 em 4,5)
7. $\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (A1)
8. $\alpha \to \neg\neg\alpha$ (pelo Teo. 14 em 7,6)

TEOREMA 18 (LEI DE DUNS SCOTUS) $\neg\alpha, \alpha \vdash \beta$

Prova.

1.	α	(por hipótese)
2.	$\neg\alpha$	(por hipótese)
3.	$\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	(por A1)
4.	$\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	(por A1)
5.	$\neg\beta \to \alpha$	(por MP 1,3)
6.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	(por MP 2,4)
7.	$(\neg\beta \to \alpha) \to \big((\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta\big)$	(por A3)
8.	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$	(por MP 5,7)
9.	$\neg\neg\beta$	(por MP 6,8)
10.	$\neg\neg\beta \to \beta$	(por A10)
11.	β	(por MP 9,10)

Desse resultado temos que se, por algum motivo tenhamos duas fórmulas contraditórias, α e $\neg\alpha$, provamos que pode-se derivar qualquer fórmula β a partir dessas hipóteses. Dizia-se "*ex falso seguitur quodlibet*" (de uma falsidade tudo se segue). A "falsidade" aqui refere-se a fórmula $\alpha \wedge \neg\alpha$ que pode ser inferida a partir de α e de $\neg\alpha$.

2.6. **Regras de inferência derivadas.** Ao invés de mantermos as referências a teoremas, usamos escrever novas regras de inferência sempre que a utilidade justifique. Essas são chamadas **regra de inferência derivadas**. As regras correspondentes aos teoremas 14 e 15 são escritas esquematicamente como

$$\textbf{(SH):}\ \frac{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma} \qquad \textbf{(TH):}\ \frac{\theta \to (\phi \to \xi)}{\phi \to (\theta \to \xi)} \qquad \textbf{(CP1):}\ \frac{\alpha \to \beta}{\neg\beta \to \neg\alpha}$$

chamadas, respectivamente, de *silogismo hipotético* e *troca de hipóteses* e *contrapositiva.* A última delas tem a a seguinte prova.

1.	$\alpha \to \beta$	(hipótese)
2.	$\beta \to \neg\neg\beta$	(Teo. 17)
3.	$\alpha \to \neg\neg\beta$	(SH 1,2)
4.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	(A10)
5.	$\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	(SH 3,4)
6.	$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to ((\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta) \to \neg\neg\neg\alpha)$	(A3)
7.	$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta) \to \neg\neg\neg\alpha$	(MP 5,6)
8.	$\neg\neg\neg\beta \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta)$	(A1)
9.	$\neg\neg\neg\beta \to \neg\neg\neg\alpha$	(SH 8,7)
10.	$\neg\beta \to \neg\neg\neg\beta$	(Teo. 17)
11.	$\neg\beta \to \neg\neg\neg\alpha$	(SH 10,9)
12.	$\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$	(A10)
13.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	(SH 11,12)

As regras derivadas são escritas, genericamente, como

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}{\beta}$$

e entende-se: se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são teoremas do sistema formal, então β é teorema do sistema formal.

Como exemplo, considere a regra

$$\frac{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \neg\alpha \to \delta, \neg\gamma}{\delta}$$

cujo esquema tem a prova

1.	$\alpha \to \beta$	(hipótese)
2.	$\beta \to \gamma$	(hipótese)
3.	$\neg\alpha \to \delta$	(hipótese)
4.	$\neg\gamma$	(hipótese)
5.	$\alpha \to \gamma$	(SH 1,2)
6.	$\neg\gamma \to \neg\alpha$	(CP1 em 4)
7.	$\neg\alpha$	(MP 4,6)
8.	δ	(MP 3,7)

2.7. **Propriedades da dedução.** O seguinte teorema nos dá as propriedades que nos ajudam nas provas de teoremas lógicos, com especial ênfase no teorema da dedução, que é bastante útil.

METATEOREMA 3 *Valem as seguintes propriedades para a de dedução de fórmulas da lógica proposicional.*

Autodedução: $\Gamma \vdash \alpha$ *para todo* $\alpha \in \Gamma$.

Monotonicidade: *Se* $\Gamma \vdash \alpha$ *então* $\Gamma \cup \Sigma \vdash \alpha$.

Regra do corte: *Se* $\Gamma \vdash \alpha_i$ *para* $i = 1, 2, \dots, k$ *e* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \vdash \beta$ *então* $\Gamma \vdash \beta$.

Compacidade: $\Gamma \vdash \alpha$ *se, e só se, existe* $\Delta \subseteq \Gamma$ *finito tal que* $\Delta \vdash \alpha$.

Destacamento: *se* $\Gamma \vdash \alpha$ *e* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ *então* $\Gamma \vdash \beta$.

Teorema da Dedução: $\alpha \vdash \beta$ *se, e somente se,* $\vdash \alpha \to \beta$ *ou, genericamente,*

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \text{ se, e somente se, } \Gamma \vdash \alpha \to \beta.$$

As três primeiras propriedades podem ser facilmente verificadas. A compacidade segue da observação que se $\Gamma \vdash \alpha$ então tomamos Δ como as fórmulas de Γ que ocorrem na prova, que é finita; a recíproca segue da monotonicidade.

O destacamento segue da definição de prova. Suponha $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. De $\Gamma \vdash \alpha$ temos uma prova $\langle \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \alpha \rangle$ de α a partir de Γ. De $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ temos uma prova $\langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m-1}, \alpha \to \beta \rangle$ de $\alpha \to \beta$ a partir de Γ. A seguinte prova

$$\begin{array}{rll}
1. & \theta_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
\text{n-1.} & \theta_{n-1} & \\
\text{n.} & \alpha & \\
\text{n+1.} & \phi_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
\text{n+m-1.} & \phi_{m-1} & \\
\text{n+m.} & \alpha \to \beta & \\
\text{n+m+1.} & \beta & \text{(por MP n,n+m)}
\end{array}$$

estabelece $\Gamma \vdash \beta$.

O teorema da dedução requer um demonstração mais elaborada e antes de demonstrá-lo vejamos algumas consequências

- $\neg\beta \to \neg\alpha \vdash (\alpha \to \beta)$ a partir do exercício 1, item 1b;
- $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$ a partir do axioma (A10);
- $\{\alpha\} \vdash \alpha$, por autodedução, portanto, $\vdash \{\alpha\} \to \alpha$;
- $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$ do teorema 17.

Escrevemos as seguintes regras derivadas a partir de três desses resultados.

(CP2): $\dfrac{\neg\beta \to \neg\alpha}{\alpha \to \beta}$ **(DN1):** $\dfrac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$ **(DN2):** $\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$

2.7.1. *Demonstração do Teorema da Dedução.* Vamos demonstrar que se $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ então $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Suponha que $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ e seja

$$\langle \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \beta \rangle$$

uma prova de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Vamos demonstrar por indução em i que $\Gamma \vdash \alpha \to \theta_i$ para todo $1 \le i \le n$ em que θ_n é a fórmula β.

Lembremos que o uso de teoremas ou de regras de inferência derivadas numa prova é apenas uma abreviação, para efeitos de formalismo uma prova contém fórmulas que são axiomas ou hipóteses ou inferências por *Modus Ponens*.

Base: a fórmula θ_1 ou é um axioma ou uma fórmula de Γ. Se é axioma ou hipótese (de $\Gamma \cup \{\alpha\}$) então

1.	θ_1	(axioma ou hipótese)
2.	$\theta_1 \to (\alpha \to \theta_1)$	(por A1)
3.	$\alpha \to \theta_1$	(por MP 1,2)

Em ambos os casos, axioma ou hipótese, vale que $\Gamma \vdash \alpha \to \theta_1$.

Hipótese indutiva: Assuma que $\Gamma \vdash \alpha \to \theta_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, i-1$.

Passo indutivo: Vamos demonstrar que a hipótese indutiva implica $\Gamma \vdash \alpha \to \theta_i$.

A fórmula θ_i ou é uma axioma ou fórmula de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, ou é resultado de inferência (MP j,k) com $j, k < i$. Nos dois primeiros casos $\Gamma \vdash \alpha \to \theta_i$, a prova é similar ao caso feito na base da indução.

Resta verificar o caso θ_i é resultado de (MP j,k). Se θ_i é resultado de (MP j,k) com $j, k < i$ então na linha j temos θ_j e na linha k temos $\theta_j \to \theta_i$. Pela hipótese indutiva $\Gamma \vdash \alpha \to \theta_j$ e $\Gamma \vdash \alpha \to (\theta_j \to \theta_i)$, assim, com hipóteses Γ

1.	$\alpha \to \theta_j$	(hipótese indutiva)
2.	$\alpha \to (\theta_j \to \theta_i)$	(hipótese indutiva)
3.	$(\alpha \to (\theta_j \to \theta_i)) \to ((\alpha \to \theta_j) \to (\alpha \to \theta_i))$	(por A2)
4.	$(\alpha \to \theta_j) \to (\alpha \to \theta_i)$	(por MP 2,3)
5.	$\alpha \to \theta_i$	(por MP 1,4)

ou seja, $\Gamma \vdash \alpha \to \theta_i$ o que completa o passo indutivo. Pelo princípio da indução matemática $\Gamma \vdash \alpha \to \theta_i$, para todo i, portanto $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Agora, vamos demonstrar que se $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ então $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Suponha que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Então

$$\Gamma, \alpha \vdash \alpha \to \beta$$

pela monotonicidade de $\vdash$. Pela autodedução de $\vdash$ temos $\Gamma, \alpha \vdash \alpha$, portanto pelo destacamento temos $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. $\square$

3. Exercícios da semana 2

(1) Dê provas para
   (a) $\vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$.
   (b) $\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

(2) Seja $\langle \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \rangle$ uma prova. A sequência $\langle \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\ell \rangle$ para todo ℓ com $1 \leq \ell \leq n$ é uma prova?

(3) Prove os seguintes teoremas lógicos para quaisquer fórmulas α e β.
   (a) $\vdash (\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$.
   (b) $\vdash (\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\beta)$.
   (c) $\vdash (\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \beta)$.
   (d) $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$
   (e) $\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$
   (f) $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$
   (g) $\vdash \beta \to \alpha \vee \beta$
   (h) $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

(4) Escreva uma demonstração para autodedução, a monotonicidade e regra do corte de $\vdash$.

(5) Verifique as seguintes regras derivadas de inferência.

(IC): $\dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$ **(ID2):** $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$ **(SD):** $\dfrac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}$ **(DM$\wedge$):** $\dfrac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$

(EC1): $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ **(MT):** $\dfrac{\alpha \to \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$ **(DM$\vee$):** $\dfrac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$ **(C):** $\dfrac{\neg\alpha \to \alpha}{\alpha}$.

(6) Justifique o seguinte método de prova:

$$\text{Se } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta \text{ e } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta \text{ então } \Gamma \vdash \alpha.$$

Use esse fato para provar

$$\{\neg\alpha \to (\beta \wedge \gamma), (\gamma \vee \delta) \to \varepsilon, \varepsilon \to \neg\beta\} \vdash \alpha.$$