3. SEMÂNTICA DA LINGUAGEM DA LÓGICA PROPOSICIONAL

Se uma fórmula $\alpha \in \mathscr{L}_0$ é verdadeira ou falsa, geralmente, depende de como interpretamos as suas fórmulas atômicas. No estudo da semântica não nos comprometemos com uma única interpretação, estamos realmente interessados em relações lógicas gerais e a verdade é uma propriedade das sentenças.

Uma interpretação para as fórmulas de $\mathscr{L}_0$ é uma função que associa a qualquer fórmula de $\mathscr{L}_0$ um elemento em uma estrutura abstrata chamada *modelo* que permite definir a veracidade das fórmulas. No nosso caso, as fórmulas assumem um de dois valores, 0 ou 1, a que chamamos de **valores-verdade**.

3.1. **Interpretação e Valoração.** Uma **valoração** de $\mathscr{L}_0$ é uma função $w : \mathscr{L}_0 \to \{0,1\}$ que atribui valor-verdade para as todas fórmulas bem formadas da linguagem e que satisfaz as seguintes condições

- $w(p_i)$ está definido para todo i;
- $w(\neg\alpha) = 1 - w(\alpha)$;
- $w(\alpha \to \beta) = \max\big(1 - w(\alpha), w(\beta)\big)$.

Dadas interpretações para todas as fórmulas atômicas $p_1, p_2, \ldots$, a atribuição de valor-verdade dá a cada fórmula atômica que representa uma afirmação verdadeira o valor 1 e a cada fórmula atômica representando uma afirmação falsa o valor 0. Não se define como lidar com quaisquer valores de verdade além de 1 e 0, embora há lógicas com outros valores-verdade, elas não são relevantes na maioria da matemática.

Exemplo 19. Seja w uma valoração tal que $w(p_1) = w(p_3) = 0$ e $w(p_2) = 1$. As condições satisfeitas por qualquer valoração, descritas acima, permite-nos encontrar o valor-verdade de qualquer FBF. Por exemplo

$$\begin{aligned} w((\neg p_1 \to p_2) \to p_3) &= \max\big(1 - w(\neg p_1 \to p_2), w(p_3)\big) \\ &= 1 - w(\neg p_1 \to p_2) \\ &= 1 - \max\big(1 - w(\neg p_1), w(p_2)\big) \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

De fato, estendendo o caso do exemplo acima, o valor-verdade de uma fórmula depende somente dos valores de suas subfórmulas atômicas, como mostra o corolário que segue do seguinte resultado.

METATEOREMA 4 *Sejam v e w duas valorações de $\mathscr{L}_0$. Para toda $\alpha \in \mathscr{L}_0$, se $v(p_i) = w(p_i)$ para toda fórmula atômica $p_i \in \mathrm{Sf}(\alpha)$, então*

$$v(\alpha) = w(\alpha).$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é por indução (metateorema 1). Sejam v e w duas valorações de $\mathscr{L}_0$ e $\alpha \in \mathscr{L}_0$ uma fórmula tal que $v(p_i) = w(p_i)$ para toda subfórmula atômica $p_i \in \mathrm{Sf}(\alpha)$.

Se α é fórmula atômica então é imediato, da hipótese, que $v(\alpha) = w(\alpha)$. Assuma que α não é fórmula atômica. Pelo metateorema da leitura única existem únicas $\beta, \gamma \in \mathrm{Sb}(\alpha)$ tais que (i) $\alpha = \neg\beta$ ou (ii) $\alpha = \beta \to \gamma$.

Assumimos que o enunciado do teorema é válido para as subfórmulas β de $\alpha = \neg\beta$, e β e γ de $\alpha = \beta \to \gamma$.

No caso $\alpha = \neg\beta$, pela hipótese indutiva, $v(\beta) = w(\beta)$, logo $1 - v(\beta) = 1 - w(\beta)$, portanto $v(\alpha) = w(\alpha)$.

No caso $\alpha = \beta \to \gamma$ e $v(\beta) = w(\beta)$ e $v(\gamma) = w(\gamma)$ então $1 - w(\beta) = 1 - v(\beta)$, portanto, $w(\beta \to \gamma) = \max(1 - w(\beta), w(\gamma)) = \max(1 - v(\beta), v(\gamma)) = v(\beta \to \gamma)$. Logo $w(\alpha) = v(\alpha)$.

Pelo princípio de indução para fórmulas, para toda FBF $\alpha \in \mathscr{L}_0$ tal que v e w coincidem nas subfórmulas atômicas vale que $v(\alpha) = w(\alpha)$. □

Uma interpretação de uma fórmula $\alpha \in \mathscr{L}_0$ fica definida por uma atribuição de valor-verdade 0 ou 1 para cada uma das suas fórmulas atômicas.

Denotemos por V o conjunto dos símbolos proposicionais

$$\mathscr{V} = \{p_1, p_2, \dots\}.$$

Uma **interpretação** é uma função

$$v \colon \mathscr{V} \to \{0,1\}.$$

Toda interpretação v pode ser estendida para uma única valoração

$$\hat{v} \colon \mathscr{L}_0 \to \{0,1\}$$

i.e., existe uma única $\hat{v}$ valoração tal que $v(p_i) = \hat{v}(p_i)$, para todo $p_i \in \mathscr{V}$.

COROLÁRIO 20 (EXTENSÃO ÚNICA DE UMA INTERPRETAÇÃO) *Dada uma interpretação $v : \mathscr{V} \to \{0,1\}$, existe uma única valoração $w : \mathscr{L}_0 \to \{0,1\}$ tal que $w(p_i) = v(p_i)$ para toda fórmula atômica $p_i \in \mathscr{V}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam u e w duas valorações que estendem a interpretação v. Para qualquer $\alpha \in \mathscr{L}_0$ vale que $u(p_i) = w(p_i) = v(p_i)$ para toda $p_i \in \mathrm{Sub}(\alpha)$, portanto, $u(\alpha) = w(\alpha)$. □

Como há uma única valoração de $\mathscr{L}_0$ que estende a interpretação v de $\mathscr{V}$, ela é denotada, inequivocamente, por $\hat{v}$.

Observação 21. Os conectivos lógicos $\wedge, \vee, \neg$ e podem ser interpretados como operadores de uma álgebra booleana $\mathscr{B} = (\{0,1\}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \max, \min, -)$. Nesse caso, o $\wedge$ é interpretado como o operador min, o $\vee$ como max e o $\neg$ como o complemento. A implicação e a bi-implicação são interpretados em função do min e max. Desse modo, toda valoração w deve satisfazer,

- $w(\alpha \wedge \beta) = \min\big(w(\alpha), w(\beta)\big)$.
- $w(\alpha \vee \beta) = \max\big(w(\alpha), w(\beta)\big)$.
- $w(\neg\alpha) = 1 - w(\alpha)$;
- $w(\alpha \to \beta) = \max\big(1 - w(\alpha), w(\beta)\big)$.
- $w(\alpha \leftrightarrow \beta) = \min\big(\max\big(1 - w(\alpha), w(\beta)\big), \max\big(w(\alpha), 1 - w(\beta)\big)\big)$.

Observemos ainda que $w(\neg\alpha) = 1$ se, e só se, $w(\alpha) = 0$, que $w(\alpha \wedge \beta) = 1$ se, e só se, $w(\alpha) = 1$ e $w(\beta) = 1$, que $w(\alpha \vee \beta) = 1$ se, e só se, $w(\alpha) = 0$ ou $w(\beta) = 0$, que $w(\alpha \to \beta) = 0$ se, e só se, $w(\alpha) = 1$ e $w(\beta) = 0$ e, finalmente, que $w(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ se, e só se, $w(\alpha) = w(\beta)$.

A mesma lógica proposicional como descrevemos até aqui pode ser expressa usando o alfabeto

$$\{p_!, p_2, p_3, \dots, \wedge, \vee, \neg, (,)\}$$

e a álgebra booleana $\mathscr{B}$ é uma modelo na qual ela pode ser interpretada (veja o metateorema 8, pág. 38).

3.2. **Satisfazibilidade, tautologia e contradição.** Dizemos que $\alpha \in \mathscr{L}_0$ é **satisfazível** se para ao menos uma interpretação v tem-se $\hat{v}(\alpha) = 1$. Uma valoração w **satisfaz** α se $w(\alpha) = 1$ e escrevemos

$$w \vDash \alpha.$$

Dizemos que uma fórmula é uma **tautologia** se o valor-verdade da fórmula é sempre 1 em qualquer interpretação, ou seja, para toda interpretação v, $\hat{v} \vDash \alpha$ e nesse caso escrevemos

$$\vDash \alpha.$$

Por exemplo, as FBF $p_1 \to (p_2 \to p_1)$, $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ e $(\neg p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (p_1 \to p_2)$ são tautologias, assim como os esquemas $\alpha \to (\beta \to \alpha)$, $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ e $(\neg\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\alpha \to \beta)$. Algumas das tautologias notáveis são

- a não contradição: $\neg(\alpha \wedge (\neg\alpha))$ e
- o terceiro excluído $\alpha \vee (\neg\alpha)$.

Vamos verificar a *não-contradição*. Seja v uma interpretação qualquer e temos

$$\begin{aligned}\hat{v}(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) &= 1 - \hat{v}(\alpha \wedge \neg\alpha) \\ &= 1 - \min(\hat{v}(\alpha), \hat{v}(\neg\alpha)) \\ &= 1 - \min(\hat{v}(\alpha), 1 - \hat{v}(\alpha)) = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

Mais tautologias notáveis são dadas a seguir

- comutatividade: $(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$ e $(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$;
- associatividade: $((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$ e $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$;
- distributividade: $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$ e $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$;
- absorção: $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha$ e $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha$;
- idempotência: $(\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$ e $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$;
- involução ou dupla negação: $\alpha \leftrightarrow \neg(\neg\alpha)$;
- leis de De Morgan: $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$ e $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$.

Vamos ver um exemplo verificando diretamente a *dupla negação*. Seja v uma interpretação qualquer e temos $\hat{v}(\neg\neg\alpha) = 1 - \hat{v}(\neg\alpha) = 1 - (1 - \hat{v}(\alpha)) = \hat{v}(\alpha)$, portanto

$$\begin{aligned}\hat{v}(\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha) &= \max(\min(\hat{v}(\alpha), \hat{v}(\neg\neg\alpha)), \min(1 - \hat{v}(\alpha), 1 - \hat{v}(\neg\neg\alpha))) \\ &= \max(\hat{v}(\alpha), 1 - \hat{v}(\alpha)) \\ &= 1\end{aligned}$$

Exercício 22. Verifique que os esquemas de fórmula $\alpha \to \beta$ e $\neg\alpha \vee \beta$ têm sempre o mesmo valor lógico em qualquer valoração.

Qual é o esquema de fórmula escrito somente com operadores $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ que em qualquer interpretação tem o mesmo valor lógico de $\alpha \leftrightarrow \beta$?

Do exercício 22 temos as tautologias

- implicação: $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$,
- bi-implicação: $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \big((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)\big)$.

Uma bi-implicação tautológica bastante útil é

- negação da implicação: $\neg(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\alpha \wedge (\neg\beta))$

que é tautologia pois para qualquer valoração w temos que $w(\neg(\alpha \to \beta)) = 1-\max(1-w(\alpha), w(\beta))$, porém (verifique)

$$1 - \max(1 - w(\alpha), w(\beta)) = \min\{ w(\alpha), 1 - w(\beta)\} = w(\alpha \wedge \neg\beta)$$

portanto, para qualquer que seja a valoração w sempre vale que $w(\neg(\alpha \to \beta)) = w(\alpha \wedge \neg\beta)$ de modo que a bi-implicação da *negação da implicação* é uma tautologia.

Exercício 23 (*Contrapositiva*). A seguinte tautologia, por sua utilidade, também é faz parte da lista das notáveis e é chamada de contrapositiva

$$\big(\alpha \to \beta\big) \leftrightarrow \big((\neg\beta) \to (\neg\alpha)\big).$$

Verifique que a fórmula acima é uma tautologia.

As implicações tautológicas são importantes nos sistemas lógicos, elas validam os mecanismos sintáticos de dedução. Algumas das implicações tautológicas da lógica proposicional são

- lei da adição: $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,
- lei da simplificação: $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$,
- *modus ponens*: $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$,
- *modus tollens*: $((\neg\beta) \wedge (\alpha \to \beta)) \to \neg\alpha$,
- silogismo disjuntivo: $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$,
- silogismo hipotético: $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$,
- redução ao absurdo: $((\alpha \wedge (\neg\beta)) \to (\gamma \wedge (\neg\gamma))) \to (\alpha \to \beta)$.

Exercício 24. Calcule o valor-verdade das fórmulas listadas acima.

Dizemos que uma fórmula é uma **contradição** se seu valor verdade for 0 em qualquer interpretação. Certamente, as fórmulas $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ e $\neg(\alpha \to \alpha)$ são contradições. Também, a negação de uma tautologia é uma contradição.

METATEOREMA 5 *α é uma tautologia se, e só se, $\neg\alpha$ é uma contradição.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

3.3. **Tabela-verdade.** Do valor lógico de uma fórmula de $\mathscr{L}_0$ numa valoração depender exclusivamente do valor de seus átomos podemos concluir que, para analisarmos os possíveis valores-verdade de uma fórmula de $\mathscr{L}_0$, basta analisarmos todas as interpretações em um conjunto finito de fórmulas atômicas. Isso garante um **procedimento efetivo** (i.e., um **algoritmo**) que, dado uma fórmula $\alpha \in \mathscr{L}_0$, descobre o valor-verdade de α em toda interpretação possível.

METATEOREMA 6 *Existe um algoritmo que, dado uma fórmula $\alpha \in \mathscr{L}_0$, decide se α é satisfazível.*

Nessa seção descrevemos um procedimento efetivo para determinar o(s) valor(es) verdade de uma fórmula bem formada. O metateorema da extensão única (corolário 4) garante um procedimento com um número finito de passos para estudar os possíveis valores-verdade de uma fórmula.

(1) O primeiro passo para montar a tabela-verdade de uma fórmula é destrinchá-la nas subfórmulas.
(2) Em seguida, montamos uma coluna para cada subfórmula, colocando as mais elementares à esquerda, e as mais complexas à direita, partindo das fórmulas atômicas até a fórmula toda.
(3) Escrevemos uma linha para cada possível interpretação (valoração das fórmulas atômicas) e usamos as regras de valoração para completar a tabela.

Por exemplo

p_1	$\neg p_1$	$p_1 \vee \neg p_1$
0	1	1
1	0	1

atesta que $p_1 \vee \neg p_1$ é uma tautologia.

Exemplo 25. Tabelas-verdade para (1) $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$, (2) $\neg(p_1 \to (p_2 \to p_1))$ e (3) $\neg p_1 \vee p_2$.

(1)

p_1	$\neg p_1$	$p_1 \wedge \neg p_1$	$\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$
0	1	0	1
1	0	0	1

(2)

p_1	p_2	$p_2 \to p_1$	$p_1 \to (p_2 \to p_1)$	$\neg(p_1 \to (p_2 \to p_1))$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

(3)

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_1 \vee p_2$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Exemplo 26. Tabela-verdade para $(p_1 \wedge p_2) \to ((\neg p_3) \vee (p_4 \leftrightarrow p_5))$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$p_1 \wedge p_2$	$\neg p_3$	$p_4 \leftrightarrow p_5$	$(\neg p_3) \vee (p_4 \leftrightarrow p_5)$	$(p_1 \wedge p_2) \to ((\neg p_3) \vee (p_4 \leftrightarrow p_5))$
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

Vimos que o valor lógico de uma fórmula de $\mathscr{L}_0$ depende exclusivamente do valor de seus átomos e isso garante um procedimento efetivo que, dado uma fórmula $\alpha \in \mathscr{L}_0$, descobre o valor-verdade de α em toda interpretação possível.

Na prática, a viabilidade desse método depende da quantidade de subfórmulas atômicas da fórmula pois o tamanho da tabela cresce exponencialmente nesse parâmetro. Uma fórmula sobre n átomos tem uma tabela com 2^n linhas. Uma fórmula com 10 átomos resulta numa tabela com 1.024 linhas, certamente muito trabalhoso para um humano mas facilmente resolvido por um computador. Entretanto, deve ficar claro que mesmo para um computador há um limite. Se há 30 átomos, a tabela irá conter mais de um bilhão de combinações de valores.

Embora haja atalhos como, por exemplo, se se atribui o valor 0 para p_1 pode-se atribuir o valor 0 para $p_1 \wedge p_2$ independentemente do valor atribuído ao p_2, o que reduz o número de cálculos a serem realizados, em tese, esses atalhos podem não ajudar. Tais atalhos não mudam fundamentalmente a dificuldade do problema.

Estamos na seguinte situação: dada uma fórmula α da lógica proposicional, queremos determinar se α é sempre verdadeira, i.e., há interpretação para os símbolos proposicionais de α que a torna verdadeira. Esse problema é conhecido na Teoria da Computação como o problema da *satisfazibilidade* de uma fórmula booleana e é chamado SAT. Determinar via força-bruta se alguma interpretação satisfaz a fórmula toma tempo exponencial no número de átomos e não se sabe se é possível tomar algum atalho que seja efetivo para toda fórmula e que diminua consideravelmente a quantidade computação necessária para tomar a decisão correta.

Ainda, dada uma valoração podemos verificar rapidamente o valor-verdade da fórmula α. Isso é uma característica da família de problemas computacionais ditos NP. O problema SAT desempenha um papel fundamental na Teoria da Complexidade Computacional uma vez que podemos mostrar que a descoberta de um algoritmo eficiente para este problema implica em algoritmos eficientes para todos os problemas computacionais da classe NP. De fato, dentre os problemas NP, esse é um dos mais difíceis, num certo sentido muito preciso, ou seja, é um problema computacional NP-completo.

3.4. **Consequência lógica.** Usamos letras gregas maiúsculas $\Gamma, \Lambda, \Sigma, \Psi, \Delta, \Omega, \Theta, \Pi, \Phi$ para denotar **conjunto de fórmulas** tomadas de $\mathscr{L}_0$. Uma valoração w **satisfaz o conjunto** Γ se satisfaz cada fórmula do conjunto, isto é, $w(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$ e, se esse é o caso, dizemos que Γ é **satisfazível**, que w **satisfaz** ou é um **modelo** para Γ e denotamos tal fato por

$$w \vDash \Gamma.$$

Uma fórmula α é **consequência lógica** (ou **consequência semântica**) das fórmulas de Γ, fato denotado por

$$\Gamma \vDash \alpha$$

se, e só se, toda valoração w que satisfaz Γ também satisfaz α. Usamos a notação

$$\Gamma \vDash \bot$$

para expressar que Γ não é satisfazível.

Exemplo 27. $\{(p_1 \vee p_2) \to p_3\} \vDash p_1 \to P_3$. De fato, seja v uma interpretação qualquer, então de $1 - \max(v(p_1), v(p_2)) \leq 1 - v(p_1)$ temos

$$\hat{v}((p_1 \vee p_2) \to p_3) = \max\big(1 - \max(v(p_1), v(p_2)), v(p_3)\big) \leq \max\big(1 - v(p_1), v(p_3)\big) = \hat{v}(p_1 \to p_3)$$

de modo que se $\hat{v}((p_1 \vee p_2) \to p_3) = 1$ então $\hat{v}(p_1 \to p_3) = 1$.

Exemplo 28. Temos que $\{(p_1 \wedge p_2) \to p_3\} \not\models p_1 \to p_3$ pois se $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = v(p_3) = 0$ então $\hat{v}((p_1 \wedge p_2) \to p_3) = 1$ mas $\hat{v}(p_1 \to p_3) = 0$.

3.4.1. *Simplificações de notação.*

- Ao invés de $\{\alpha\} \models \beta$ escrevemos $\alpha \models \beta$.
- Ao invés de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ escrevemos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \models \beta$.
- Ao invés de $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ escrevemos $\Gamma, \alpha \models \beta$.

METATEOREMA 7 *A consequência semântica tem as seguintes propriedades.*

(1) $\Gamma, \alpha \models \beta$ *se, e só se,* $\Gamma \models \alpha \to \beta$*. Em particular* $\alpha \models \beta$ *se, e só se,* $\models \alpha \to \beta$.

(2) $\{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n\} \models \beta$ *se, e só se,* $\models (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta$.

DEMONSTRAÇÃO. Para a demonstração do caso particular de (1) suponhamos $\alpha \models \beta$. Seja w uma interpretação. Se $\hat{w}(\alpha) = 0$ então $\hat{w}(\alpha \to \beta) = 1$ por definição. Se $\hat{w}(\alpha) = 1$ então $\hat{w}(\beta) = 1$, pois assumimos $\alpha \models \beta$, portanto, $\hat{w}(\alpha \to \beta) = 1$. Logo a implicação $\alpha \to \beta$ é uma tautologia, isto é, $\models \alpha \to \beta$.

Agora, assumamos $\models \alpha \to \beta$ e seja w uma interpretação. Se $\hat{w}$ satisfaz α então $\hat{w}(\beta) = 1$, pois $\alpha \to \beta$ é tautologia, portanto $\alpha \models \beta$.

A prova do caso geral de (1) é deixada como exercício.

Para a demonstração de (3) suponha que $\{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n\} \models \beta$ e seja w uma interpretação. Se $\hat{w}(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = 0$ então $\hat{w}((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta) = 1$ por definição. Se $\hat{w}(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = 1$ então $\hat{w}(\beta) = 1$ por hipótese, portanto, $\hat{w}((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta) = 1$. Logo $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta$ é tautologia.

Por outro lado, se $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta$ é tautologia e w é uma interpretação tal que $\hat{w}(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = 1$, então, $\hat{w}(\beta) = 1$. □

Exercício 29. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e β fórmulas. Mostre um algoritmo que decide se β é consequência lógica de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Em particular, a partir da propriedade (1) do metateorema 7 e das tautologias notáveis (página 27) temos, por exemplo,

Modus Ponens	$\alpha, (\alpha \to \beta) \models \beta$
Modus Tollens	$(\neg\beta), \alpha \to \beta \models \neg\alpha$
Silogismo disjuntivo	$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \models \beta$
Silogismo hipotético	$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \models \alpha \to \gamma$

Ademais, podemos novas deduzir tautologias de consequências lógicas

(i) de $\alpha, \beta \vDash \alpha \wedge \beta$ obtemos a tautologia $\vDash \alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$,

(ii) de $\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \vDash \gamma$ temos $\vDash (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$ usando (1) e temos $\vDash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$ usando (1) e, em seguida, usando (2) do metateorema 7,

e vice versa, deduzir consequências lógicas de tautologias, com por exemplo

(iii) de $\vDash (\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$ temos $\alpha, (\alpha \to \beta) \vDash \beta$,

(iv) de $\vDash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$ temos $(\alpha \to \gamma), (\beta \to \gamma) \vDash (\alpha \vee \beta \to \gamma)$.

Exercício 30. Verifique que a consequência semântica tem as seguintes propriedades.

(1) $\alpha \vDash \alpha$.

(2) se $\alpha \vDash \beta$ e $\beta \vDash \alpha$ então $\vDash \alpha \leftrightarrow \beta$.

(3) se $\alpha \vDash \beta$ e $\beta \vDash \gamma$ então $\alpha \vDash \gamma$.

Exercício 31. Verifique se vale a afirmação: Se $\Gamma \vDash \alpha$, então $\Gamma, \beta \vDash \alpha$.

3.5. **Exemplo mundano de consequência lógica.** Começamos essa seção com o seguinte exemplo ao qual nos referimos por Exemplo . Consideremos as seguintes sentenças atômicas

p: O time joga bem

q: O time ganha o campeonato.

r: O técnico é o culpado.

s: Os torcedores estão felizes.

com as quais formamos as seguintes sentenças compostas

$p \to q$**:** Se $\underbrace{\text{o time joga bem}}_{p}$, então $\underbrace{\text{o time ganha o campeonato}}_{q}$.

$\neg p \to r$**:** Se $\underbrace{\text{o time não joga bem}}_{\neg p}$, então $\underbrace{\text{o técnico é o culpado}}_{r}$.

$q \to s$**:** Se $\underbrace{\text{o time ganha o campeonato}}_{q}$ então $\underbrace{\text{os torcedores estão felizes}}_{s}$.

$\neg s$**:** Os torcedores não estão felizes.

Como são 4 símbolos atômicos, a quantidade de interpretações possíveis é $2^4 = 16$ e todas essas interpretações com as respectivas valorações são dadas a seguir.

p	q	r	s	$p \to q$	$\neg p \to r$	$q \to s$	$\neg s$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0

donde extraímos a única interpretação que satisfaz as sentenças compostas

p	q	r	s	$p \to q$	$\neg p \to r$	$q \to s$	$\neg s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	1	0	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Se supomos que valem as premissas

Se o time joga bem então o time ganha o campeonato ($p \to q$).
Se o time não joga bem então o técnico é o culpado ($\neg p \to r$).
Se o time ganha o campeonato então os torcedores estão felizes ($q \to s$).
Os torcedores não estão felizes ($\neg s$).

então uma conclusão lógica é que o técnico é culpado. Isso porque todas as interpretações que fazem as premissas verdadeiras tornam 'o técnico é culpado' uma sentença verdadeira.

Com as premissas

Se o time não joga bem então o técnico é o culpado ($\neg p \to r$).
Se o time ganha o campeonato então os torcedores estão felizes ($q \to s$).
Os torcedores não estão felizes ($\neg s$).

temos a seguinte parte relevante da tabela-verdade

p	q	r	s	$\neg p \to r$	$q \to s$	$\neg s$
0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1

donde concluímos $\neg p$, ou seja, o time não joga bem. Note que não podemos concluir nem que 'o time ganhou o campeonato' (q) é verdadeira, nem que o 'time não ganhou o campeonato' ($\neg q$) é verdadeira, pois as duas situações são possíveis.

Por outro lado, se supomos que valem as premissas

Se o time joga bem então o time ganha o campeonato ($p \to q$).
Se o time não joga bem então o técnico é o culpado ($\neg p \to r$).
Se o time ganha o campeonato então os torcedores estão felizes ($q \to s$).

então não podemos concluir nenhuma das sentenças atômicas, nem suas negações, pois nas interpretações que tornam as premissas verdadeiras não há um *único* valor lógico para sentenças atômicas como mostra o seguinte extrato da tabela-verdade

p	q	r	s	$p \to q$	$\neg p \to r$	$q \to s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	1	1	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	0	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	1	1	1	1

Uma alternativa à tabela-verdade

No caso do exemplo  vimos, usando uma tabela-verdade, que se supomos que valem as premissas

$p \to q$: Se o time joga bem então o time ganha o campeonato.
$\neg p \to r$: Se o time não joga bem então o técnico é o culpado.
$q \to s$: Se o time ganha o campeonato então os torcedores estão felizes.
$\neg s$: Os torcedores não estão felizes.

então uma conclusão lógica é

r: O técnico é culpado.

Em outras palavras temos que

$$\{p \to q, \neg p \to r, q \to s, \neg s\} \vDash r.$$

Podemos obter a conclusão sem usar tabela-verdade deduzindo no sistema dedutivo da lógica do seguinte modo

1	$p \to q, q \to s$	são premissas
2	$p \to s$	por silogismo hipotético a partir de 1
3	$\neg p \vee s$	pela equivalência da implicação em 2
4	$\neg s$	premissa
5	$\neg p$	por silogismo aditivo de 3 e 4
6	$\neg p \to r$	premissa
7	r	por *modus ponens* com 5 e 6

Resta saber se o sistema dedutivo deduz verdade a partir de verdades!

3.6. **Apêndice: Abreviações.** Note que na fórmula $((\alpha \wedge (\neg\beta)) \to (\gamma \wedge (\neg\gamma))) \to (\alpha \to \beta)$ a papel da subfórmula $\gamma \wedge (\neg\gamma)$ é simplesmente "expressar uma falsidade", ou seja, uma contradição. Usaremos o símbolo $\perp$ para expressar uma contradição qualquer, ou seja, esse símbolo representa uma fórmula que é 0 em qualquer interpretação e o usamos sempre que a fórmula propriamente dita for irrelevante para a situação em discurso. A rigor, dizemos que $\perp$ abrevia a fórmula $p_1 \wedge (\neg p_1)$. Ademais $\top$ abrevia $\neg\perp$. A fórmula acima fica reescrita como $((\alpha \wedge (\neg\beta)) \to \perp)) \to (\alpha \to \beta)$. Ademais, deduzimos imediatamente das propriedades das álgebras booleanas que são tautologias

- complemento: $(\alpha \wedge (\neg\alpha)) \leftrightarrow \perp$ e $(\alpha \vee (\neg\alpha)) \leftrightarrow \top$;
- elemento neutro: $(\alpha \vee \perp) \leftrightarrow \alpha$ e $(\alpha \wedge \top) \leftrightarrow \alpha$.

3.7. **Equivalência lógica.** Dizemos que as fórmulas α e β são **logicamente (ou semanticamente) equivalentes** se

$$\hat{v}(\alpha) = \hat{v}(\beta), \text{ para toda interpretação } v$$

e denotamos esse fato por $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Decorre dessa definição que $\alpha \Leftrightarrow \beta$ é equivalente a dizer que $\alpha \leftrightarrow \beta$ é uma tautologia, isto é,

$$\alpha \Leftrightarrow \beta \text{ se, e somente se, } \vDash \alpha \leftrightarrow \beta.$$

Todas as bi-implicações tautológicas notáveis da página 27 e seguintes são equivalências semânticas como, por exemplo,

dupla negação	$\alpha \Leftrightarrow \neg\neg\alpha$
implicação	$\gamma \to \delta \Leftrightarrow (\neg\gamma) \vee \delta$
bi-implicação	$\gamma \leftrightarrow \delta \Leftrightarrow (\gamma \to \delta) \wedge (\delta \to \gamma)$
contrapositiva	$(\alpha \to \beta) \Leftrightarrow ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))$

só para citar algumas.

Exemplo 32. A sequência de equivalências abaixo estabelece que a fórmula $\neg(p_1 \vee (\neg p_1 \wedge p_2))$ é semanticamente equivalente à fórmula $\neg(p_1 \vee p_2)$

$\neg(p_1 \vee (\neg p_1 \wedge p_2))$	$\Leftrightarrow$	$\neg p_1 \wedge \neg(\neg p_1 \wedge p_2))$	por De Morgan
	$\Leftrightarrow$	$\neg p_1 \wedge (\neg\neg p_1 \vee \neg p_2)$	por De Morgan
	$\Leftrightarrow$	$\neg p_1 \wedge (p_1 \vee \neg p_2)$	por dupla negação
	$\Leftrightarrow$	$(\neg p_1 \wedge p_1) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$	por distributiva
	$\Leftrightarrow$	$\bot \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$	pela abreviação
	$\Leftrightarrow$	$(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$	pela conjunção
	$\Leftrightarrow$	$\neg(p_1 \vee p_2)$	por De Morgan

3.8. **Conjunto adequado de conectivos.** Sejam α e β fórmulas semanticamente equivalentes. Seja γ uma fórmula na qual α ocorre como subfórmula, isto é, tal que $\alpha \in \mathrm{Sf}(\gamma)$. Trocando uma ou mais das ocorrências de α por β em γ o resultado é uma fórmula δ tal que $\delta \Leftrightarrow \gamma$.

Por exemplo, em $((p_1 \to p_2) \wedge ((\neg p_3) \vee (p_1 \to p_2)))$ trocamos as ocorrências de $p_1 \to p_2$ por $(\neg p_1) \vee p_2$ e obtemos $(((\neg p_1) \vee p_2) \wedge ((\neg p_3) \vee ((\neg p_1) \vee p_2)))$. Evidentemente

$$((p_1 \to p_2) \wedge ((\neg p_3) \vee (p_1 \to p_2))) \Leftrightarrow (((\neg p_1) \vee p_2) \wedge ((\neg p_3) \vee ((\neg p_1) \vee p_2))).$$

Por causa das equivalências lógicas da implicação e da bi-implicação, respectivamente

$$\gamma \to \delta \Leftrightarrow (\neg\gamma) \vee \delta \text{ e } \gamma \leftrightarrow \delta \Leftrightarrow (\gamma \to \delta) \wedge (\delta \to \gamma)$$

em que a última, por sua vez, pode ser escrita como $\gamma \leftrightarrow \delta \Leftrightarrow (\neg\gamma \vee \delta) \wedge (\neg\delta \vee \gamma)$, é possível demonstrar o seguinte resultado.

METATEOREMA 8 *Para qualquer formula α de $\mathscr{L}_0$ existe uma fórmula $\alpha' \Leftrightarrow \alpha$ tal que*

(1) *α e α' têm os mesmos símbolos atômicos*

(2) *em α' somente ocorrem os conectivos $\neg$, $\vee$ e $\wedge$.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova é por indução. Se α é fórmula atômica então o enunciado fica automaticamente satisfeito pelo próprio α. Se α é $\neg\beta$, por hipótese indutiva existe $\beta' \Leftrightarrow \beta$ que satisfaz o enunciado, portanto, $\neg\beta'$ é equivalente a α, tem os mesmos átomos, e não não ocorrem $\to$ e $\leftrightarrow$.

Se α é $\beta \to \delta$, por hipótese indutiva existem $\beta' \Leftrightarrow \beta$ e $\delta' \Leftrightarrow \delta$ tal que $\beta' \to \delta' \Leftrightarrow \beta \to \delta$ e $\beta' \to \delta'$ tem os mesmos átomos de $\beta \to \delta$. Então $\alpha \Leftrightarrow (\neg\beta') \vee \delta'$ e essa última tem os mesmos átomos de α e não tem ocorrência de $\to$ e $\leftrightarrow$.

Assim, pelo princípio de indução para fórmulas o enunciado do metateorema vale para toda fórmula $\alpha \in \mathscr{L}_0$. $\square$

3.9. **Argumentos.** Um **argumento** é uma sequência de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \therefore \beta$ e ele é **válido** se, e só se,

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \vDash \beta$$

caso contrário é inválido.

São argumentos válidos *Modus Ponens*, *Modus Tollens*, *Silogismo disjuntivo* e o*Silogismo hipotético*, descritos logo acima.

O argumento $\neg(p_1 \wedge p_2), \neg p_1 \vDash p_2$ é inválido pois se $v(p_1) = v(p_2) = 0$ então $\hat{v}(\neg(p_1 \wedge p_2)) = \hat{v}(\neg p_2) = 1$ enquanto que $\hat{v}(p_2) = 0$.

3.10. **Exemplos de argumentos em linguagem natural.** Abaixo damos alguns exemplos de formalização de sentenças da linguagem natural. Os problemas de lógica conhecidos das revistas de passatempo (veja aqui) podem ser formalizados e resolvidos na lógica proposicional.

Exemplo 33. Sócrates diz: "*Se eu sou culpado, eu devo ser punido. Eu sou culpado. Logo eu devo ser punido.*" Esse argumento é **logicamente correto** pois se o formalizamos com

p : "eu sou culpado"

q : "eu devo ser punido"

então $(p \to q), q \vDash q$ (Modus Ponens).

Exemplo 34. Sócrates diz: "*Se eu sou culpado, eu devo ser punido. Eu não sou culpado. Logo eu não devo ser punido.*"

Esse argumento é **não é logicamente correto** pois $(p \to q), \neg q \nvDash \neg q$, basta tomar v com $v(p) = 0$ e $v(q) = 1$.

Exemplo 35. Aladdin encontra dois baús A e B em uma caverna. Ele sabe que cada um deles contém, exclusivamente, ou um tesouro ou uma armadilha fatal. No baú A está escrito: "Pelo menos um desses dois baús contém um tesouro." No baú B está escrito: "No baú A há uma armadilha fatal." Aladdin sabe que ambas as inscrições são verdadeiras, ou ambas são falsas. É possível Aladdin escolher um baú com a certeza de que ele vai encontrar um tesouro? Se este for o caso, qual baú ele deve abrir?

Seja a : "o baú A contém o tesouro" e b : "o baú B contém o tesouro". Observemos que $\neg a$: "o baú A contém a armadilha" e $\neg b$: "o baú B contém a armadilha".

A inscrição no baú A é $a \vee b$ e no baú B é $\neg a$. Ademais, $\hat{v}(a \vee b \leftrightarrow \neg a) = 1$, ou seja, $\hat{v}(a \vee b) = \hat{v}(\neg a)$, ou seja, $\max(\hat{v}(a), \hat{v}(b)) = 1 - \hat{v}(a)$, portanto, $v(a) = 0$ e $v(b) = 1$, ou seja, Aladdin deve abrir o baú B.

Exemplo 36. Três caixas são apresentadas a você. Uma contém ouro, as outras duas estão vazias. Cada caixa tem estampada nela uma pista sobre o seu conteúdo; as pistas são: CAIXA 1: "O ouro não está aqui". CAIXA 2: "O ouro não está aqui". CAIXA 3: "O ouro está na caixa 2". Apenas uma mensagem é verdadeira, as outras são falsas. Qual caixa tem o ouro?

Seja $\emptyset_i$ o átomo proposicional que representa "a caixa i tem ouro" para cada $i = 1,2,3$. "Uma caixa tem ouro e as outras estão vazias" é formalizado por

$$(\emptyset_1 \wedge \neg\emptyset_2 \wedge \neg\emptyset_3) \vee (\neg\emptyset_1 \wedge \emptyset_2 \wedge \neg\emptyset_3) \vee (\neg\emptyset_1 \wedge \neg\emptyset_2 \wedge \emptyset_3) \tag{4}$$

e "uma pista é verdadeira as outras duas são falsas" por

$$(\neg\emptyset_1 \wedge \neg\neg\emptyset_2 \wedge \neg\emptyset_2) \vee (\neg\neg\emptyset_1 \wedge \neg\emptyset_2 \wedge \neg\emptyset_2) \vee (\neg\neg\emptyset_1 \wedge \neg\neg\emptyset_2 \wedge \emptyset_2) \Leftrightarrow (\emptyset_1 \wedge \neg\emptyset_2) \vee (\emptyset_1 \wedge \emptyset_2) \tag{5}$$

da tabela-verdade

$\emptyset_1$	$\emptyset_2$	$\emptyset_3$	(4)	(5)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

deduzimos que a única interpretação que satisfaz (4) e (5) é $v(\emptyset_1) = 1$ e $v(\emptyset_2) = v(\emptyset_3) = 0$.

3.11. **Apêndice: Álgebras booleanas.** Uma álgebra booleana é uma estrutura algébrica $(A, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \sqcup, \sqcap, \sim)$, em que $A \neq \varnothing$ é um conjunto, $\sqcup, \sqcap$ são operações binárias sobre A (isto é, funções $A \times A \to A$), $\sim$ uma operação unária sobre A (isto é, função $A \to A$) e $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in A$ constantes as quais devem satisfazer os seguintes axiomas para quaisquer $x, y, z \in A$

(1) comutatividade: $x \sqcup y = y \sqcup x$ e $x \sqcap y = y \sqcap x$;
(2) associatividade: $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ e $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$;
(3) distributividade: $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ e $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$;
(4) complemento: $x \sqcap (\sim x) = \mathbf{0}$ e $x \sqcup (\sim x) = \mathbf{1}$;
(5) absorção: $x \sqcup (x \sqcap y) = x$ e $x \sqcap (x \sqcup y) = x$.

Decorrem das propriedades enumeradas acima as seguintes propriedades que também valem para qualquer álgebra booleana

(6) idempotência: $x \sqcup x = x$ e $x \sqcap x = x$;
(7) elemento neutro: $x \sqcup \mathbf{0} = x$ e $x \sqcap \mathbf{1} = x$;
(8) involução: $\sim\sim x = x$;
(9) leis de De Morgan: $\sim (x \sqcup y) = (\sim x) \sqcap (\sim y)$ e $\sim (x \sqcap y) = (\sim x) \sqcup (\sim y)$.

São exemplos de álgebra booleana

- $\mathscr{B} = \left(\{0,1\}, 0, 1, \max, \min, \overline{}\right)$. Aqui $\max, \min$ têm seus significados habituais no domínio $\{0,1\}$ e $\overline{x} = 1 - x$.
- $\mathscr{P} = \left(\wp(X), \varnothing, X, \cup, \cap, ^{\complement}\right)$. Aqui X é um conjunto não vazio, $\cup$ e $\cap$ têm seus significados habituais para conjuntos e $^{\complement}(A) = A^{\complement}$ é o complemento do A com respeito a X.

Exercício 37. Verifique que $\mathscr{B}$ e $\mathscr{P}$ são álgebras booleanas, isto é, satisfazem as propriedades 1–5. Também, reescreva as propriedades 6–9 para cada uma dessas álgebras booleanas.

Exercício 38. Demonstre os enunciados dos itens 6–9 daqueles enunciados nos itens 1–5.