4. METATEOREMAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL

Demonstraremos algumas das propriedades mais importantes da lógica proposicional. Assumimos a linguagem formada pelos símbolos proposicionais atômicos e os conectivos $\neg$ e $\to$ com as convenções usuais de simplificação e abreviação.

4.1. Correção.

Um sistema dedutivo é dito **correto** se qualquer teorema nesse sistema dedutivo é tautologia em todas as interpretações da teoria semântica da linguagem sobre a qual esse sistema se baseia. No nosso caso o metateorema da correção afirma que qualquer teorema obtido no sistema dedutivo axiomático de Kleene, chamado de K, é uma tautologia da lógica proposicional.

METATEOREMA 9 (TEOREMA DA CORREÇÃO) *Se* $\vdash \alpha$ *então* $\vDash \alpha$.

Em um sistema formal axiomático a prova de correção se resume a verificar a validade dos axiomas e que as regras de inferência preservam a validade das fórmulas. Para demonstrar o teorema da correção vamos assumir as seguintes hipóteses

(1) os axiomas (A1) – (A10) são tautologias (que, embora seja trabalhoso, é fácil de verificar);
(2) se $\vDash \alpha$ e $\vDash \alpha \to \beta$ então $\vDash \beta$, que segue de $\alpha, \alpha \to \beta \vDash \beta$.

Disso, é intuitivamente claro que se $\vdash \alpha$ então cada fórmula na prova de α é uma tautologia.

Demonstração do teorema da correção. Suponha $\vdash \alpha$ e seja $\langle \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \rangle$ uma prova de α. Vamos provar usando indução em j que $\vDash \theta_j$ e usando que $\alpha, \alpha \to \beta \vDash \beta$.

Para $i = 1$, $\vDash \theta_1$ pois este é um axioma.

Assuma que $\vDash \theta_1$, $\vDash \theta_2$, $\ldots$, $\vDash \theta_{i-1}$. Se θ_i é um axioma então $\vDash \theta_i$ (hipótese (1) assumida logo acima), senão θ_i é resultado de uma inferência (MP j,k) com $j, k < i$. Pela hipótese indutiva $\vDash \theta_j$ e $\vDash \theta_k$ com θ_k da forma $\theta_j \to \theta_i$. Logo temos $\vDash \theta_j$ e $\vDash \theta_j \to \theta_i$, portanto, pela hipótese do item (2) acima concluímos que $\vDash \theta_i$. Pelo princípio da indução matemática $\vDash \theta_j$ para todo j, em particular, $\vDash \alpha$. $\square$

Exercício 39. Prove a **correção forte** do sistema formal K: se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \vDash \alpha$.

4.2. Consistência.

Um conjunto de fórmulas Γ é **inconsistente** se para alguma fórmula β da linguagem temos $\Gamma \vdash \beta$ e $\Gamma \vdash \neg\beta$. Dizemos que Γ é **consistente** se não for inconsistente. Por exemplo, para qualquer fórmula α o conjunto $\{\alpha, \neg\alpha\}$ é, trivialmente, inconsistente.

Exercício 40. O conjunto $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$ é consistente?

LEMA 41 *Se um conjunto de fórmulas* Γ *é inconsistente, então*

(1) Γ *não é satisfazível;*

(2) $\Gamma \vdash \alpha$ *para toda fórmula* α*;*

DEMONSTRAÇÃO. Seja Γ um conjunto inconsistente de fórmulas de $\mathscr{L}_0$.

Para demonstrar o item 1 basta observarmos que se $\Gamma \vdash \beta$ e $\Gamma \vdash \neg\beta$, para algum β, então temos pelo exercício 39 acima que $\Gamma \vDash \beta$ e $\Gamma \vDash \neg\beta$, um absurdo.

Para demonstrar o item 2 observamos que se Γ é inconsistente então, por definição, $\Gamma \vdash \beta$ e $\Gamma \vdash \neg\beta$, para algum β. Ainda $\{\beta, \neg\beta\} \vdash \alpha$ para qualquer α pelo teorema 18 (lei de Duns Scotus). Pela regra do corte (página 21) de $\vdash$ concluímos que $\Gamma \vdash \alpha$ para qualquer fórmula α. $\square$

LEMA 42 *Se* $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *é inconsistente então* $\Gamma \vdash \alpha$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ não é consistente então existe $\beta \in \mathscr{L}_0$ tal que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ e $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$. Pelo Teorema da Dedução (página 21) $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \beta$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$.

Aplicando o Teorema da Dedução, duas vezes, a partir do axioma (A3) obtemos que $\neg\alpha \to \beta, \neg\alpha \to \neg\beta \vdash \neg\neg\alpha$ e usando o axioma (A10) concluímos que $\neg\alpha \to \beta, \neg\alpha \to \neg\beta \vdash \alpha$.

Assim, temos $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \beta$, $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$ e $\{\neg\alpha \to \beta, \neg\alpha \to \neg\beta\} \vdash \alpha$ e da regra do corte concluímos $\Gamma \vdash \alpha$. $\square$

Um conjunto de fórmulas Γ é **consistente maximal** se

(1) Γ é consistente,

(2) $\Gamma \cup \{\beta\}$ é inconsistente para todo $\beta \notin \Gamma$.

LEMA 43 *Se* Γ *é consistente então existe* $\Delta \supseteq \Gamma$ *consistente maximal.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\theta_1, \theta_2, \ldots$ uma enumeração qualquer das fórmulas bem formadas da linguagem. Definimos, indutivamente, a sequência de conjuntos de fórmulas $L_0 = \Gamma$ e

$$L_{i+1} = \begin{cases} L_i \cup \{\theta_i\} & \text{se } L_i \cup \{\theta_i\} \text{ consistente} \\ L_i & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e defina $\Delta = \bigcup_{i \geq 0} L_i$. Pela construção temos que cada L_i é consistente.

O conjunto Δ é consistente pois, caso contrário, $\Delta \vdash \beta$ e $\Delta \vdash \neg\beta$, para algum β. Mas, se esse é o caso então $L_i \vdash \beta$ e $L_i \vdash \neg\beta$, para algum i (por quê?), o que é uma contradição.

Ainda, é maximalmente consistente. De fato, para todo α existe um j tal que $\alpha = \theta_j$, então se $\alpha \notin \Delta$ temos, em particular, que $\alpha \notin L_{j+1}$ porque $L_j \cup \{\alpha\}$ é inconsistente, portanto $\Delta \cup \{\alpha\}$ é inconsistente. $\square$

LEMA 44 *Se* Δ *é consistente maximal então*

(1) $\Delta \vdash \alpha$ *se, e só se,* $\alpha \in \Delta$*;*

(2) $\neg\alpha \in \Delta$ *se, e só se,* $\alpha \notin \Delta$*;*

(3) *$\alpha \to \beta \in \Delta$ se, e só se, $\neg\alpha \in \Delta$ ou $\beta \in \Delta$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja Δ consistente maximal. Para demonstrar o item 1 notemos que se $\alpha \in \Delta$ então $\Delta \vdash \alpha$, como já vimos, pela autodedução.

Agora, suponha que $\Delta \vdash \alpha$. Se $\alpha \notin \Delta$ então, da maximalidade, temos que $\Delta \cup \{\alpha\}$ é inconsistente, isto é, $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ e $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$ para alguma fórmula β. Pelo Teorema da Dedução $\Delta \vdash \alpha \to \beta$ e $\Delta \vdash \alpha \to \neg\beta$ e, como $\Delta \vdash \alpha$, obtemos $\Delta \vdash \beta$ e $\Delta \vdash \neg\beta$ contrariando o fato de Δ ser consistente.

Na demonstração dos próximos itens usaremos essa equivalência entre $\vdash$ e $\in$ para conjuntos consistentes maximais do item 1. O item 2 segue de

$$\neg\alpha \in \Delta \text{ sse } \Delta \vdash \neg\alpha \text{ (pelo item 1)}$$

$$\Delta \vdash \neg\alpha \text{ sse } \Delta \nvdash \alpha \text{ (pelo lema 42)}$$

$$\Delta \nvdash \alpha \text{ sse } \alpha \notin \Delta \text{ (pelo item 1).}$$

Na segunda linha temos que se $\Delta \vdash \neg\alpha$ então $\Delta \nvdash \alpha$, caso contrário teríamos inconsistência. Por outro lado, $\Delta \nvdash \alpha$ implica que $\Delta \cup \{\neg\alpha\}$ é consistente (contrapositiva do lema 42), portanto $\neg\alpha \in \Delta$ de modo que $\Delta \vdash \neg\alpha$.

Para demonstrar o item 3 suponha que $\Delta \vdash \alpha \to \beta$. Do Teorema da Dedução $\Delta \vdash \alpha \to \beta$ se, e só se, $\Delta, \alpha \vdash \beta$. Vamos verificar que

$$\Delta, \alpha \vdash \beta \text{ se, e só se, } \neg\alpha \in \Delta \text{ ou } \beta \in \Delta.$$

Suponha que $\Delta, \alpha \vdash \beta$. Se $\alpha \notin \Delta$ então $\neg\alpha \in \Delta$ (item 2) e se $\alpha \in \Delta$ então $\Delta \vdash \beta$ logo $\beta \in \Delta$. Para a recíproca, se $\neg\alpha \in \Delta$ então $\Delta, \alpha \vdash \beta$ pela inconsistência das hipóteses, ou se $\beta \in \Delta$ então $\Delta, \alpha \vdash \beta$ por autodedução. □

Pelo lema 41, se Γ é satisfazível então Γ é consistente. A recíproca dessa afirmação também vale.

METATEOREMA 10 *Para todo Γ, temos Γ consistente se, e só se, Γ é satisfazível.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que Γ é consistente e tome $\Delta \supseteq \Gamma$ consistente maximal. Se Δ for satisfazível, Γ também será. Assim, basta demonstrar que Δ é satisfazível.

Defina a interpretação v por $v(p) = 1$ se, e somente se $p \in \Delta$. Vamos provar por indução para fórmulas da lógica proposicional que

$$\alpha \in \Delta \textit{ se, e só se, } \hat{v}(\alpha) = 1.$$

Se α é atômica então $\alpha \in \Delta$ se, e só se, $\hat{v}(\alpha) = 1$ por definição.

Se α é $\neg\beta$ e, por hipótese, $\beta \in \Delta$ se, e só se, $\hat{v}(\beta) = 1$. Mas

$$\neg\beta \in \Delta \text{ se, e só se, } \beta \notin \Delta$$
$$\beta \notin \Delta \text{ se, e só se, } \hat{v}(\beta) = 0$$
$$\hat{v}(\beta) = 0 \text{ se, e só se, } \hat{v}(\neg\beta) = 1$$

portanto, $\alpha \in \Delta$ se, e só se, $\hat{v}(\alpha) = 1$.

Se α é $\beta \to \gamma$ e, por hipótese, $\beta \in \Delta$ se, e só se, $\hat{v}(\beta) = 1$ e $\gamma \in \Delta$ se, e só se, $\hat{v}(\gamma) = 1$. Porém,

$$\beta \to \gamma \in \Delta \text{ se, e só se, } \neg\beta \in \Delta \text{ ou } \gamma \in \Delta \text{ (do lema anterior, item 3)}$$
$$\neg\beta \in \Delta \text{ ou } \gamma \in \Delta \text{ se, e só se, } \hat{v}(\neg\beta) = 1 \text{ ou } \hat{v}(\gamma) = 1 \text{ (da hipótese indutiva)}$$
$$\hat{v}(\neg\beta) = 1 \text{ ou } \hat{v}(\gamma) = 1 \text{ se, e só se, } \max(\hat{v}(\neg\beta), \hat{v}(\gamma)) = 1 \text{ (por definição de valoração)}$$
$$\max(\hat{v}(\neg\beta), \hat{v}(\gamma)) = 1 \text{ se, e só se, } \hat{v}(\beta \to \gamma) = 1 \text{ (por definição de valoração).}$$

Portanto $\beta \to \gamma \in \Delta$ se, e só se, $\hat{v}(\beta \to \gamma) = 1$.

Pelo Princípio de indução para fórmulas, para toda fórmula bem formada α, vale $\alpha \in \Delta$ se, e só se, α é satisfazível.

Como $\Gamma \subseteq \Delta$, temos que se $\alpha \in \Gamma$ então α é satisfazível, ou seja, se Γ é consistente, então é satisfazível.

Agora, assuma que Γ é satisfazível. Se for inconsistente, então $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$, pelo exercício 39 seguem então $\Gamma \vDash \alpha$ e $\Gamma \vDash \neg\alpha$, uma contradição, portanto, Γ é consistente. □

4.3. **Completude.** Um sistema formal é **semanticamente completo** se toda tautologia é um teorema.

METATEOREMA 11 (TEOREMA DA COMPLETUDE) *O sistema formal* K *é completo, i.e., se* $\vDash \alpha$ *então* $\vdash \alpha$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $\vDash \alpha$ mas $\nvdash \alpha$. Se $\nvdash \alpha$ então $\{\neg\alpha\}$ é consistente, portanto satisfazível, uma contradição. □

4.4. **Decidibilidade.** Um conjunto de fórmulas $\Sigma \subset \mathscr{L}_0$ é **decidível** se existe um algoritmo que recebe uma fórmula $\alpha \in \mathscr{L}_0$ e responde corretamente "$\alpha \in \Sigma$?". Por exemplo, vimos no metateorema 6 que existe um algoritmo que, dado uma fórmula $\alpha \in \mathscr{L}_0$, decide se α é satisfazível. Todos os subconjuntos finitos de fórmula são decidíveis.

Exercício 45. Mostre um algoritmo que recebe uma cadeia α de caracteres do alfabeto $\mathscr{A}_0$ e decide se α é uma fórmula bem formada.

A cardinalidade do conjunto dos algoritmos é enumerável, entretanto, a cardinalidade das partes de $\mathscr{L}_0$ não é enumerável de modo que há subconjuntos não decidíveis. Por exemplo, demonstra-se que para alguns $\Sigma \subset \mathscr{L}_0$ o conjunto das consequências de Σ não é decidível.

Dizemos que um sistema formal é **decidível** se existe um algoritmo que com entrada α, uma fórmula bem formada da linguagem, decide se α é um teorema no sistema.

METATEOREMA 12 (TEOREMA DA DECIDIBILIDADE) *O sistema formal* K *é decidível.*

DEMONSTRAÇÃO. O algoritmo recebe uma fórmula e verifica se é tautologia usando tabela-verdade; se for então é teorema e se não for tautologia, então não é teorema. $\square$