Lógica de predicados — Discussão informal

A lógica de predicados é uma extensão da lógica proposicional para uma linguagem mais rica, portanto de maior poder de expressão. Argumentos como

Premissa	*O quadrado de qualquer inteiro é positivo*
Premissa	*9 é um quadrado*
Conclusão	*9 é positivo*

não são validados pela lógica proposicional. Na lógica de predicados usamos variáveis, quantificadores e predicados para capturar elementos mais finos da estrutura gramatical.

A lógica de predicados é a linguagem formal padrão para a formalização axiomática da matemática. A Aritmética de Peano e a Teoria de Conjuntos de Zermelo–Fraenkel, por exemplo, são axiomatizações da Teoria dos Números e da Teoria de Conjuntos.

O que queremos formalizar com a lógica de predicados? Sentenças como

- Todo aluno é mais novo que algum professor.
- Todo número primo maior ou igual a dois é ímpar.
- Todo anel de divisão finito é um corpo.

podem ser simbolizadas no cálculo proposicional, mas o dito não captura toda estrutura da sentença. Os alvos do discurso (sujeito e objeto gramaticais) têm qualidades e mantêm relações. O que procuramos? Uma linguagem mais rica que leva em conta a estrutura interna das sentenças

sujeito – predicado – objeto

na qual sujeito e objetos de quem se fala são elementos de um **universo do discurso** e são representados por **constantes** ou por objetos genéricos e não especificados (pronomes) que são representados por **variáveis**; os **predicados** e as **relações** são explicitados. Além disso, o "**para todo**" e o "**existe**" são incorporados como primitivas da linguagem.

Exemplo 46. Num universo (de discurso) *far, far away ....*

Constantes:	a para 'Armando', d para 'Daniel' e j para 'Manoel'.
Predicados:	P para 'é professor' e A para 'é aluno'.
Relações:	J para 'lecionam juntos' e N para 'é mais novo'.

$P(a)$ simboliza a sentença 'Armando é professor'. $\neg A(j)$ simboliza a sentença 'Manoel não é aluno'. $J(a,d)$ simboliza a sentença 'Armando e Daniel lecionam juntos'. $M(d,a)$ simboliza a sentença 'Daniel é mais novo que Armando'. Obervemos que, considerando o significado natural das sentenças, $J(a,d)$ e $J(d,a)$ têm o mesmo significado, mas $M(a,d)$ e $M(d,a)$ *não* têm o mesmo significado.

Usamos as *variáveis* $x, y, z\ldots$ para representar membros genéricos do universo. $P(x)$ simboliza 'x é professor' e $M(x, y)$ simboliza 'x é mais novo que y'. Nem $P(x)$ nem $M(x, y)$ têm valor lógico, não são sentenças no sentido da lógica proposicional que vimos na Parte 1 destas notas. São chamadas de *sentenças abertas*.

As sentenças abertas tornam-se sentenças lógicas quando substituímos as variáveis por elementos do universo ou se a *quantificamos*. O *quantificador* $\forall$ é lido "para todo" e o *quantificador* $\exists$ é lido "existe". $\forall x\, P(x)$ simboliza a sentença todo x é professor' a qual pode ser atribuída valor lógico: significa que todo elemento do universo do discurso é professor. $\exists x\, P(x)$ simboliza a sentença 'algum x é professor' a qual pode ser atribuída valor lógico: significa que pelo menos um elemento do universo do discurso é professor.

Notemos que, por exemplo

(1) $\forall x\, M(x, y)$ é uma sentença aberta
(2) $\exists y \forall x\, M(x, y)$ e $\forall x \exists y\, M(x, y)$ têm significados diferentes.

A sentença 'Todo aluno é mais novo que algum professor' pode ser simbolizada por

$$\forall x \exists y (A(x) \wedge P(y) \to M(x, y))$$

A sentença 'Há um professor tal que todo aluno aprende algo com ele', considerando as relações $B(x, y, z)$ para 'y aprende z com x' e $H(x)$ para 'x é um assunto', pode ser simbolizada por

$$\exists x \Big(P(x) \wedge \forall y \big(A(y) \to \exists z\, (H(z) \wedge B(x, y, z)) \big) \Big)$$

Em matemática, muitas vezes tratamos de estruturas que consistem em um conjunto com operações e relações entre seus elementos. Por exemplo, na Teoria Elementar de Números o conjunto de elementos em discussão é o conjunto de números inteiros $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ Pode-se precisar de símbolos para alguns números, para variáveis, para funções (como $\cdot$ e $+$) e para as relações (como $=$, $<$, e $|$). A sentença "Para todo x, se x é um inteiro maior que ou igual a zero e todo inteiro é divisível por x, então x é igual a um" considerando que

- 0 e 1 são constantes;
- $>(x, y)$ simboliza a relação "x é maior que y";
- $=(x, y)$ simboliza a relação "x é igual a y" e
- $|\,(x, y)$ simboliza a relação "x divide y",

é simbolizada como

$$\forall x \Big(\big(>(x, 0) \vee =(x, 0) \big) \wedge \forall y\, (|\,(x, y)) \to =(x, 1) \Big)$$

ou , usando as simplificações já adotadas e $\geqslant$ para '> ou =', escrevemos

$$\forall x \Big((x \geqslant 0 \wedge \forall y\, x | y) \to x = 1 \Big).$$

A expressão

$$\forall x \exists y\Big(0 < y \wedge x < y \wedge \forall z\big((z|y \wedge 0 < z) \rightarrow (z = 1 \vee z = y)\big)\Big)$$

pode ser interpretada, nesse contexto, que "existem inifinitos números primos", ou seja, que para todo inteiro x existe um inteiro positivo $y > x$ cujos únicos divisores são o 1 e o próprio y.

5. Linguagens formais de primeira ordem

Diferente da lógica de proposições não temos uma única linguagem na lógica predicados. Uma *linguagem lógica de primeira ordem* é um conjunto de fórmulas escritas a partir de um alfabeto que considera símbolos comuns a todas as linguagens e os símbolos que são específicos de cada linguagem, ditos *não lógicos* ou *extra lógicos*.

A seguir descrevemos uma linguagem lógica *genérica* de primeira ordem denotada por $\mathscr{L}_1$. O alfabeto genérico é

$$\mathscr{A}_1 = \{x_i \colon i \in \mathbb{N}\} \cup \big\{\neg, \rightarrow, (,)\forall, \doteq\big\} \cup \{c_i \colon i \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup_{n \geqslant 1} \big\{R_i^n \colon i \in \mathbb{N}\big\} \cup \bigcup_{n \geqslant 1} \big\{F_i^n \colon i \in \mathbb{N}\big\}$$

dos símbolos permitidos para as expressões na linguagem genérica incluem

símbolos lógicos	variáveis:	$x_1 \ x_2 \ \ldots$
	conectivos lógicos:	$\neg \ \rightarrow$
	quantificador:	$\forall$
	pontuação:	$(\quad)$
símbolo relacional de igualdade	$\doteq$	
símbolos não-lógicos	Constantes:	$c_1 \ c_2 \ \ldots$
	Para cada $n \geqslant 1$:	
	relacionais n-ários:	$R_1^n \ R_2^n \ \ldots$
	funcionais n-ários:	$F_1^n \ F_2^n \ \ldots$

As constantes, os símbolos relacionais e funcionais são **específicos de cada linguagem** de primeira ordem e *um ou mais deles pode ser vazio.* Os símbolos lógicos são compartilhados por toda linguagem de primeira ordem. *O símbolo de igualdade é um símbolo relacional binário especial.* Há autores que tratam a igualdade como um símbolo lógico e outros que tratam como não-lógico de modo a distinguir-se as linguagens de primeira ordem com igualdade e sem igualdade. Aqui não faremos essa distinção, não o chamaremos de lógico mas consideraremos que *toda linguagem de primeira ordem tem o símbolo de igualdade.* As constantes e os simbolos relacionais e funcionais são os *símbolos não-lógicos* e são específicos de cada linguagem, as quais, geralmente, dependem do uso pretendido.

Exemplo 47 (linguagem da Teoria dos Grafos). A linguagem da teoria dos grafos não tem constantes, não tem símbolos funcionais e tem apenas um símbolo relacional binário R_1^2 que abreviamos por A, simplesmente, que denota a relação de adjacência.

Exemplo 48 (linguagem da Teoria Aritmética de Números). A linguagem da aritmética tem uma constante, o 0, tem um símbolo funcional unário F_1^1, que abreviamos por S, tem dois símbolos funcionais binários F_1^2 e F_2^2, que abreviamos por $+$ e $\cdot$ respectivamente, e um relacional binário R_1^2 que abreviamos por $<$.

Exemplo 49 (linguagem da Teoria dos Conjuntos). A linguagem da teoria dos conjuntos não tem constantes, não tem símbolos funcionais e tem apenas um símbolo relacional binário R_1^2 que abreviamos por $\in$.

Exemplo 50 (linguagem da Igualdade). A linguagem da igualdade não tem constantes, não tem símbolos funcionais e não tem símbolos relacionais.

Intuitivamente, as constantes deverão ser interpretadas como elementos específicos do universo de discurso da linguagem; os símbolos da função n-ária interpretados como funções específicas que mapeiam n-úplas de elementos do universo de discurso à elementos do universo; os símbolos de relação n-ária destinam-se a designar relações entre n elementos. O símbolo quantificador destina-se a representar "para todos" em referência à todos os elementos do universo e é usado com variáveis.

5.1. **Termos.** São as sequências de símbolos do alfabeto obtidas a partir das regras abaixo.

(T1) Variáveis e constantes são termos.
(T2) Para qualquer natural n, e qualquer símbolo funcional F_i^n, se $t_1, t_2, \dots, t_n$ são termos então $F_i^n t_1 t_2 \dots t_n$ é termo.
(T3) Não há outros termos além dos obtidos pela aplicação de um número finito de vezes das regras acima.

Exemplo 51. São termos: c_1, x_{101}, $F_2^1 x_1$, $F_2^2 x_1 c_8$, $F_1^4 c_1 c_2 x_1 x_2$. Note que $F_2^2 x_1$ não é termo (por quê?). A cadeia de símbolos $F_1^1 F_1^2 x_1 x_2$ é um termo? $F_1^1 F_1^2 F_1^1 x_1 x_2$ é um termo?

METATEOREMA 13 (TEOREMA DA UNICIDADE DE REPRESENTAÇÃO DOS TERMOS) *Se t é um termo de uma linguagem de primeira ordem, então uma, e apenas uma, das asserções abaixo é verdadeira:*

- *t é uma variável;*
- *t é uma constante;*
- *há um único n para o qual t é $F^n t_1 t_2 \dots t_n$ para únicos termos $t_1, \dots, t_n$ e único símbolo funcional n-ário F^n.*

METATEOREMA 14 (PRINCÍPIO DE INDUÇÃO PARA TERMOS) *Seja Γ um conjunto de termos de uma linguagem de primeira ordem. Se*

(1) *as variáveis e as constantes pertencem a Γ;*
(2) *se $t_1, t_2, \dots t_n$ pertencem a Γ então $F t_1 t_2 \dots t_n$ pertence a Γ para qualquer que seja o símbolo funcional n-ário F.*

Então Γ é o conjunto de todos os termos da linguagem.

5.2. **Fórmulas.** *Fórmulas bem formadas* (FBF) são as sequências de símbolos do alfabeto obtidas a partir das regras abaixo.

(F1) Se t e s são termos, então $(\doteq ts)$ é uma fórmula. Também, para qualquer natural n, e qualquer símbolo relacional R_i^n, se $t_1, \dots, t_n$ são termos então $R_i^n t_1 t_2 \dots t_n$ é uma fórmula. Toda fórmula obtida por aplicação exclusiva dessa regra é dita **fórmula atômica**.
(F2) Se α e β são fórmulas, então $(\neg\alpha)$ e $(\alpha \to \beta)$ são fórmulas.
(F3) Se α é fórmula e x é uma variável, então $(\forall x\, \alpha)$ é fórmula.
(F4) Não há outras fórmulas além daquelas obtidas pela aplicação um número finito de vezes as regras acima.

A linguagem genérica obtida dos símbolos do alfabeto genérico $\mathscr{A}_1$ é denotada por $\mathscr{L}_1$.

Exemplo 52. $\Big(\big(R_1^1 x_1 \to R_2^3 x_4 x_2 c_1\big) \to \big(\forall x_1 ((\forall x_2\, R_2^3 c_4 x_2 c_1) \to (\neg(\doteq F_1^1 x_1 F_1^1 c_1)))\big)\Big)$.

METATEOREMA 15 (TEOREMA DA UNICIDADE DE REPRESENTAÇÃO DAS FÓRMULAS) *Seja α uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem. Então α satisfaz uma, e apenas uma, das condições abaixo*

- *α é uma fórmula atômica da forma $R t_1 t_2 \dots t_n$, onde R é um símbolo relacional n-ário e $t_1, \dots, t_n$ são termos, para únicos n, R e t_i's;*
- *α é uma fórmula atômica da forma $(\doteq st)$ para únicos s e t termos;*
- *α é da forma $(\neg\beta)$, para uma única fórmula β;*
- *α é da forma $(\beta \to \gamma)$ para únicos β e γ fórmulas;*

- *α é da forma $(\forall x \beta)$, para uma única fórmula β e uma única variável x.*

METATEOREMA 16 (PRINCÍPIO DE INDUÇÃO PARA AS FÓRMULAS) *Seja Γ um conjunto de fórmulas de uma linguagem de primeira ordem. Se*

(1) *as fórmulas atômicas pertencem a Γ;*
(2) *se α pertence a Γ então $(\neg\alpha)$ pertence a Γ;*
(3) *se α e β pertencem a Γ então $(\alpha \to \beta)$ pertence a Γ;*
(4) *se α pertence a Γ e x é uma variável, então $(\forall x\, \alpha)$ pertence a Γ.*

Então Γ é o conjunto de todas as fórmulas da linguagem.

5.3. **Simplificações, abreviaturas e omissão de parênteses.** Vamos assumir algumas convenções de notação para facilitar nossa vida. No uso dos símbolos admitimos algumas simplificações na escrita, como já fizemos na lógica proposicional.

- Fórmulas: usamos as metavariáveis $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ possivelmente com índices.
- Termos: usamos as metavariáveis s, t, u, v possivelmente com índices.
- Variáveis: usamos as metavariáveis x, w, y, z possivelmente com índices.
- Constantes: usamos as metavariáveis a, b, c, d, e, f possivelmente com índices.
- Símbolos relacionais: ao invés de R_i^n escrevemos R e também usamos outros símbolos como $P, Q, R, S, <, \prec$. Ainda, escrevemos

$$R(t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ ao invés de } R^n t_1 t_2 \dots t_n.$$

  Para as relações R binárias escrevemos

$$(a\, R\, b) \text{ ao invés de } R(a, b)$$

  como em $(a < b)$, em particular, escrevemos

$$(t \doteq s) \text{ ao invés de } \doteq (t, s)$$

  como é usual.
- Símbolos funcionais: ao invés de F_i^n escrevemos F e também usamos outros símbolos como $F, G, H, +, \cdot$. Ainda, ao invés de $F^n t_1 t_2 \dots t_n$ escrevemos $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Para as operações binárias F escrevemos $(a\, F\, b)$ ao invés de $F(a, b)$, como em $(a + b)$.

5.3.1. *Abreviaturas.* Para resultados teóricos (metamatemáticos) é vantajoso possuirmos o mínimo possível de símbolos, entretanto, para nos expressarmos de maneira clara e sucinta quanto mais símbolos, melhor. Tratando alguns símbolos como abreviaturas de outros nós ganhamos dos dois lados.

símbolo	*lê-se*	*uso*
$\wedge$	*conjunção*	$(\alpha \wedge \beta)$ abrevia $(\neg(\alpha \to (\neg\beta)))$
$\vee$	*disjunção*	$(\alpha \vee \beta)$ abrevia $((\neg\alpha) \to \beta)$
$\leftrightarrow$	*biimplica*	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$ abrevia $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$
$\exists$	*existe*	$(\exists x\alpha)$ abrevia $(\neg(\forall x(\neg\alpha)))$
$\nexists$	*não existe*	$(\nexists x\,\alpha)$ abrevia $(\neg(\exists x\alpha))$
$\neq$	*diferente*	$(s \neq t)$ abrevia $(\neg(s \doteq t))$
$\perp$	*falsum*	abrevia $(\alpha \wedge (\neg\alpha))$
$\top$	*verum*	abrevia $(\neg\perp)$

Exercício 53. Escreva $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ e $(\nexists x\,\alpha)$ usando apenas conectivos e quantificadores do alfabeto $\mathscr{A}_1$.

Representamos os conectivos lógicos binários $\vee$, $\wedge$, $\to$ e $\leftrightarrow$ genericamente, pelo símbolo $\square$, no caso de múltiplas ocorrências de conectivos distintos usaremos índices $\square_1$, $\square_2$ e assim por diante. Com isso $\alpha\square\beta$ indica uma fórmula composta por α, β e algum dos conectivos e qual deles, especificamente, não importa no momento em que se usa o símbolo $\square$ com o cuidado de que duas ocorrências numa mesma frase significa o mesmo conectivo; por exemplo em "$\alpha\square\eta$ deve ser lido como $(\alpha\square\eta)$" *não* deve ser entendido como, por exemplo, "$\alpha \to \eta$ deve ser lido como $(\alpha \wedge \eta)$" mas sim como "$\alpha \to \eta$ deve ser lido como $(\alpha \to \eta)$" (e, respectivamente, o mesmo para $\square$ sendo $\wedge, \vee, \leftrightarrow$).

Ademais, representamos os quantificadores $\forall$ e $\exists$ genericamente por Q possivelmente com índices, como no caso dos conectivos.

5.3.2. *Omissão de parênteses.*

- Omitimos os parênteses externos de uma fórmula, recolocando quando a usamos para compor outras fórmulas. Por exemplo, escrevemos $\alpha \to \beta$ no lugar de $(\alpha \to \beta)$, mas recolocamos os parênteses quando escrevemos, por exemplo, $\forall x(\alpha \to \beta)$.
- $\forall$ tem precedência sobre $\neg$ que tem precedência sobre $\to$; considerando as abreviações ordem de precedência é $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \to, e \leftrightarrow$.
- Em sequências de conectivos omitimos o uso sucessivo de parênteses. Isto é, escrevemos $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ no lugar de $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ e $\alpha \to \beta \to \gamma$ é lido como $\alpha \to (\beta \to \gamma)$. O mesmo valendo para os outros conectivos.
- Quando não houver riscos de más interpretações, omitimos os parênteses externos em subfórmulas do tipo $\forall x\alpha$, $\exists x\alpha$ e $\neg\alpha$. Por exemplo, escrevemos $\neg\forall x\exists y\alpha$, em vez de $\neg(\forall x(\exists y\alpha))$.

Exemplo 54. De volta ao exemplo 52

$$\Big(\big(R_1^1 x_1 \to R_2^3 x_4 x_2 c_1\big) \to \big(\forall x_1((\forall x_2\, R_2^3 c_4 x_2 c_1) \to (\neg(\doteq F_1^1 x_1 F_1^1 c_1)))\big)\Big)$$

que simplificando fica escrito como

$$(R(x) \to S(z,y,c)) \to \forall x \forall y\big(S(a,y,c) \to (F(x) \neq F(c))\big).$$

5.4. **Linguagem de primeira ordem para a Aritmética.** Vejamos um exemplo de linguagem de primeira ordem para a Aritmética que consiste do estudo dos números naturais e suas propriedades. Denotaremos essa linguagem por $\mathscr{L}_N$ cujo alfabeto contém, além dos símbolos lógicos, os não-lógicos

- a constante 0,
- o símbolo funcional unário S e os símbolos funcionais binários $+$ e $\cdot$, e
- o símbolo relacional binário $<$.

São exemplos de termos dessa linguagem $+\cdot 0 x_1\, x_2$, $SSSS0$, $+x_1 S0$, $\doteq \cdot x_1 + S0SS0 \cdot x_1 SSS0$. Usando as convenções de simplificação reescrevemo-os $(0\cdot x)+y$, $S(S(S(S(0))))$, $x+S(0)$, $x\cdot(S(0)+S(S(0))) \doteq x\cdot S(S(S(0)))$. São fórmulas da linguagem:

(1) $< \cdot S0S0 + S0S0$ ou, simplesmente, $S(0)\cdot S(0) < S(0)+S(0)$.
(2) $(\forall x_1 \doteq +0x_1 x_1)$ ou, simplesmente, $\forall x(x+0 \doteq x)$.
(3) $\Big(\forall x_1\big(\forall x_2(\doteq +S0x_1 + x_2 S0 \to \doteq x_1 x_2)\big)\Big)$ ou $\forall x \forall y\,(x+S(0) \doteq y+S(0) \to x \doteq y)$.
(4) Já simplificado $\forall x \forall y \exists z\big(y \doteq x+z \to (x<y \vee x \doteq y)\big)$.

A intenção é interpretar a constante 0 como o número *zero*, S como a *função sucessor* e $+,\cdot,<$ interpretados como, respectivamente, a adição, a multiplicação é o menor que em $\mathbb{N}$. Os termos $0, S0, SS0, SSS0, SSSS0, \dots$ intencionam descrever os números naturais zero, um , dois, três, quatro, etc. Com essa interpretação, que ainda é somente uma intenção, podemos dar alguns exemplos intuitivos de expressões da aritmética nessa linguagem.

Exemplo 55. 'Não existe raiz de 2' é expresso por $\nexists x(x\cdot x \doteq S(S(0)))$ que reescrita usando somente símbolos do alfabeto fica $(\neg(\neg(\forall x_1(\neg(\doteq \cdot x_1 x_1 SS0)))))$. Também podemos expressar a mesma ideia usando $(\forall x_1(\neg(\doteq \cdot x_1 x_1 SS0)))$.

Exercício 56. Expresse em $\mathscr{L}_N$ a sentença 'existem infinitos números primos'.

5.4.1. *Outros exemplos informais em linguagens de primeira ordem.* Na linguagem da igualdade pura, $\mathscr{L}_=$, que não tem símbolos não-lógicos, conseguimos expressar certas ideias, por exemplo, 'existe um único sujeito' por $\exists x \forall y(y \doteq x)$, ou 'existem somente dois sujeitos' por $\exists x \exists y((x \neq y) \wedge \forall z\,(z \doteq x \vee z \doteq y))$.

Na linguagem para Teoria dos Conjuntos $\mathscr{L}_C$, que só tem o símbolo relacional binário $\in$, a intenção das variáveis é representar conjuntos e $x \in y$ diz que o conjunto x é elemento do conjunto y. A Teoria de Conjuntos de Zermelo–Fraenkel é escrita nessa linguagem. A existência do conjunto vazio é expressa por $\exists x \forall y \neg(y \in x)$.

A existência do conjunto definido no paradoxo de Russel (página **??**) é expresso por

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \neg(y \in y)). \tag{6}$$

Exercício 57. Escreva uma fórmula que simboliza a sentença 'existe um único conjunto vazio' em $\mathscr{L}_C$.

5.5. **Variáveis livres, ligadas e substituição de variáveis.** Dizemos que uma variável x ocorre **livre** em uma fórmula α se

(1) α é atômica e x ocorre em α;
(2) α é da forma $(\neg\beta)$ e x ocorre livre em β;
(3) α é da forma $(\beta \to \gamma)$ e x ocorre livre em β ou γ;
(4) α é da forma $\forall y \psi$ e x é diferente de y e x ocorre livre em ψ.

Uma ocorrência de x em α que não é livre é dita **ligada**. O item 4 acima é a chave para classificarmos a ocorrência de uma variável como livre ou ligada: a ocorrência de uma variável x é ligada se ela está no escopo de uma ocorrência de um quantificador. O escopo de um quantificador numa fórmula α é a subfórmula β na qual o quantificador se aplica (quando a regra de formação de fórmula quantificada foi aplicada, isto é, em $(\forall x \beta)$ o escopo de x é β).

Cada ocorrência de uma variável x é livre ou ligada, mas não ambas. Entretanto, a mesma variável pode ocorrer livre e ligada na mesma fórmula. Por exemplo,

(1) Em $\forall x_7 (x_5 \doteq x_7)$ a ocorrência de x_5 é livre e a ocorrência de x_7 é ligada.
(2) Em $\forall x_0 ((x_0 \doteq F(x_6)) \to (\neg \forall x_6 R(x_6)))$ a primeira ocorrência de x_6 é livre e a última ocorrência é ligada.
(3) Em $\forall z (\forall x (P(x) \to R(z))) \to (Q(y) \to P(x))$ a variável x é livre e ligada, y é livre e z é ligada.

Uma fórmula α sem ocorrência de variáveis livre é dita **sentença**. Por exemplo, $x \doteq y$ é fórmula mas não é sentença.

O conjunto das variáveis livres. Antes de irmos adiante, definimos recursivamente o conjunto VL das variáveis livres de uma fórmula:

(1) se t é termo então

$$VL(t) = \begin{cases} \varnothing, & \text{se } t \text{ é } c \\ \{x\}, & \text{se } t \text{ é } x \\ VL(t_1) \cup \cdots \cup VL(t_n), & \text{se } t \text{ é } F(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

(2) se α é fórmula então

$$VL(\alpha) = \begin{cases} VL(t_1) \cup VL(t_2), & \text{se } \alpha \text{ é } t_1 \doteq t_2 \\ VL(t_1) \cup \cdots \cup VL(t_n), & \text{se } \alpha \text{ é } R(t_1, \ldots, t_n) \\ VL(\beta), & \text{se } \alpha \text{ é } \neg\beta \\ VL(\beta) \cup VL(\gamma), & \text{se } \alpha \text{ é } \beta\Box\gamma \\ VL(\beta) \setminus \{x\}, & \text{se } \alpha \text{ é } Q x\,\beta \end{cases}$$

Pelos metateoremas de indução o conjunto VL está definido para todos os termos e todas as formulas da linguagem $\mathscr{L}_1$.

5.6. **Substituição de variáveis.** Se t e s são termos e x é uma variável, definimos $[t]_x^s$ o termo obtido substituindo *toda* ocorrência da variável x pelo termo s. Formalmente, definimos a **substituição em termos** recursivamente:

- $[x]_x^s$ é o termo s e $[y]_x^s$ é o termo y;
- se c é uma constante, $[c]_x^s$ é o termo c;
- se t é da forma $F(t_1, \ldots, t_n)$, então $[t]_x^s$ é o termo $F([t_1]_x^s, \ldots, [t_n]_x^s)$.

Se α é uma fórmula, x é uma variável e t é um termo, definimos $[\alpha]_x^t$ a fórmula obtida substituindo todas as ocorrências *livres* da variável x pelo termo t.

Formalmente, definimos a **substituição em fórmulas** recursivamente

- se α é $(s \doteq t)$ então $[\alpha]_x^t$ é $([s]_x^t \doteq [t]_x^t)$;
- Se α é $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ então $[\alpha]_x^t$ é $R([t_1]_x^t, [t_2]_x^t, \ldots, [t_n]_x^t)$;
- Se α é $\neg\beta$ então $[\alpha]_x^t$ é $\neg[\beta]_x^t$;
- Se α é $\gamma \to \beta$ então $[\alpha]_x^t$ é $[\gamma]_x^t \to [\beta]_x^t$;
- Se α é $\forall x\,\beta$ então $[\alpha]_x^t$ é α; senão, sempre que $y \neq x$, se α é $\forall y\,\beta$ então $[\alpha]_x^t$ é $\forall y\,[\beta]_x^t$.

Por exemplo

(1) $[(x \doteq y)]_y^x$ é $(x \doteq x)$.
(2) $[(x \doteq y)]_x^y$ é $(y \doteq y)$.
(3) $[\forall x\,(x \doteq y)]_x^y$ é $\forall x\,(x \doteq y)$.
(4) $[\forall x\,(x \doteq y)]_y^x$ é $\forall x\,(x \doteq x)$.

(5) $[(\forall x\, P(x)) \to P(x)]_x^\tau$ é $\forall x\, P(x) \to P(\tau)$.

(6) $[\forall x\, (\neg \forall y\, (x \doteq y)) \to (\neg \forall y\, (x \doteq y))]_x^y$ é $\forall x\, (\neg \forall y\, (x \doteq y)) \to (\neg \forall y\, (y \doteq y))$.

(7) $[\forall x\, (P(x,y) \to (\neg Q(y) \vee \exists y\, P(x,y)))]_y^{F(y,z)}$ é $\forall x\, (P(x,F(y,z)) \to (\neg Q(F(y,z)) \vee \exists y\, P(x,y)))$.

Exemplo 58. Considere em $\mathscr{L}_N$ a fórmula $\exists x(y \doteq S(S(0))\cdot x)$. Se substituímos y pelo termo $S(S(S(0)))$ temos $\exists x\,(S(S(S(0))) \doteq S(S(0))\cdot x)$. Se substituímos por x então temos $\exists x(x \doteq S(S(0))\cdot x)$

Substituição admissível. A substituição da variável x pelo termo t na fórmula φ é **admissível** se nenhuma ocorrência livre de x em φ estiver no escopo de um quantificador que *liga* qualquer variável que aparece em t. Isto é, para cada variável y que aparece em t, nenhum lugar onde x ocorre livre em φ está no escopo de '$\exists y$' ou '$\forall y$'.

Por exemplo, o termo x não é admissível para a variável y na fórmula $\forall x P(x,y)$; o termo $F(x,y)$ não é admissível para a variável x em $\forall y P(x,y)$; o termo z é admissível para y em $P(y,z) \to \forall y Q(y,z)$.

Formalmente, o termo t é **admissível** para a variável x na fórmula α se

(1) α é atômica;

(2) α é $\neg\beta$ e t é admissível para t em β;

(3) α é $\beta \to \gamma$ e t é admissível para x em α e em β;

(4) α é $\forall y\, \beta$ e se $x \in VL(\beta)$ então $y \notin VL(t)$ e t é admissível para x em β.

Exercício 59. Prove usando indução em fórmulas que t é admissível para x em α se, e só se, as variáveis de t na fórmula $[\alpha]_x^t$ não são ligadas por um quantificador.

Se $x \notin VL(\alpha)$, então $[\alpha]_x^t$ é admissível para qualquer termo t e, nesse caso, as fórmulas α e $[\alpha]_x^t$ são idênticas. Uma variável x sempre é admissível para ela mesmo em qualquer fórmula e $[\varphi]_x^x$ é a fórmula φ. A variável y não é uma substituição admissível para x na fórmula $\forall y\,(x \doteq y)$ porque se substituímos x por y a nova ocorrência de y seria ligada. Isso fará diferença no valor verdade de uma sentença, enquanto que $\forall y\,(y \doteq y)$ será uma tautologia em qualquer interpretação, a fórmula $\forall y\,(x \doteq y)$ tem valor verdade que dependerá da interpretação.

Exercício 60. É x uma substituição admissível para z em φ se φ é $z \doteq x \to \forall z(z \doteq x)$? Em caso afirmativo, o que é $[\varphi]_z^x$?

5.7. **Generalização.** Se α é uma fórmula então uma **generalização** de α é a fórmula

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n\, \alpha$$

para quaisquer coleção de variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, independente delas ocorrerem ou não em α.

Exemplo 61. São generalizações de $x \doteq y$ as fórmulas: $\forall x\,(x \doteq y)$, $\forall y\,(x \doteq y)$, $\forall y \forall x\,(x \doteq y)$, $\forall z \forall y \forall x\,(x \doteq y)$, $\forall w \forall z \forall y \forall x\,(x \doteq y)$.