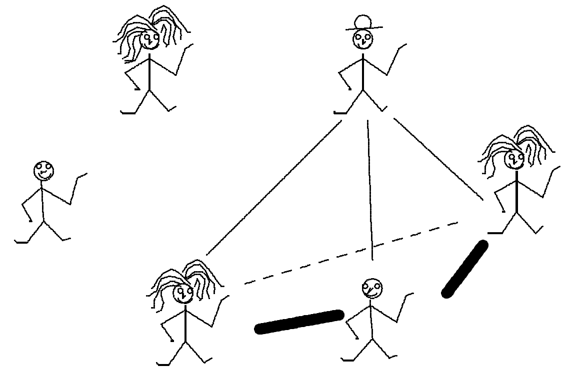
Cálculo de Partições

$(6) \to (3)^2_2$: *"Em qualquer festa com seis pessoas, existem 3 que se conhecem mutuamente ou existem 3 que se desconhecem mutuamente."*



Notação Se I é conjunto, denotamos por $[I]^n$ o conjunto $\{A \subseteq I \colon |A| = n\}$. Usaremos κ, λ, σ para cardinais (não necessariamente infinitos, por enquanto).

1. Definição. *Seja $n < \omega$. Chamamos $c\colon [I]^n \to \sigma$ uma* ***coloração****. Dizemos que $H \subseteq I$ é* ***homogêneo*** *se c é constante sobre $[H]^n$.*

Notação

$$\kappa \to (\lambda)^n_\sigma$$

significa que para todo conjunto X de cardinalidade κ e para toda coloração $c\colon [X]^n \to \sigma$ existe $H \subseteq X$ tal que $|H| = \lambda$ e H é homogêneo para c.

2. Teorema (Ramsey'30 & Erdős – Szekeres'35). *Para quaisquer $n, \sigma \in \omega$,*

$$(\omega) \to (\omega)^n_\sigma.$$

3. Teorema (Ramsey – versão finita). *Para quaisquer $n, \sigma, l \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $(k) \to (l)^n_\sigma$.*

Demonstração do Teorema de Ramsey para $n = 2$.

Dado uma colaração $c\colon [\omega]^2 \to \sigma$ tome $S_0 = \omega$ e defina S_i e n_i, recursivamente sobre $i < \omega$:

1. fixado S_i escolha arbitrariamente $n_i \in S_i$,

2. escolhido $n_i \in S_i$, tome

$$T_j = \{u \in S_i \colon c(\{n_i, u\}) = j\},$$

e observe que os T_j's particionam $S_i \setminus \{n_i\}$ infinito. Portanto, existe j' tal que $T_{j'}$ é infinito. Defina $S_{i+1} = T_{j'}$ (observe que $S_{i+1} \subseteq S_i$).

Então, para todo $i < j, k$ vale que $c(\{n_i, n_j\}) = c(\{n_i, n_k\})$ pois $n_j \in S_j \subseteq S_{i+1}$ e $n_k \in S_k \subseteq S_{i+1}$ e para todo $u \in S_{i+1}$, $c(\{n_i, u\})$ é constante.

Portanto, está bem definida a coloração f da sequência $\{n_i\}_{i\in\omega}$, dada por

$$f(n_i) = c(\{n_i, n_j\}), \text{ para todo } j > i.$$

Como f é uma partição de um conjunto infinito em finitas partes (o número de cores é finito), existe $j \in \sigma$ e uma subsequência $\{n_{i_j}\}_{j\in\omega}$ tal que $f(n_{i_s}) = j$, para todo $s \in \omega$. Agora, para todo $0 \leq s < t$ temos $c(\{n_{i_s}, n_{i_t}\}) = f(n_{i_s}) = j$, portanto, $A = \{n_{i_s} : s \in \omega\}$ é homogêneo. ∎

Observe que pelo teorema acima temos $(\omega) \to (l)^2_\sigma$ para todo $l < \omega$.

Demonstração do Teorema de Ramsey – versão finita – para $n = 2$.

Suponha que não, i.e. para todo natural n, existe $c_n \colon [n]^2 \to \sigma$ sem $A \subseteq n$, $|A| = l$ e A homogêneo. Denote por F_n o conjunto das funções de $[\omega]^2$ em σ tais que para $f \restriction [n]^2$ não existe $A \subseteq n$ de cardinalidade l e homogêneo. Então, por hipótese, $F_n \neq \emptyset$.

Note que se $\bigcap F_n \neq \emptyset$ temos uma contradição pois, neste caso, temos uma f, coloração de $[\omega]^2$, tal que para todo n natural $f \restriction [n]^2$ não admite A de cardinalidade l e homogêneo, contra $(\omega) \to (l)^2_\sigma$.

Tome o espaço topológico σ com a topologia discreta e $X = {}^{[\omega]^2}\sigma$ com a topologia produto. Então, pelo Teorema de Tychonoff, X é compacto. Observe que para todos $n_1, \ldots, n_j \in X$ e para todos $r_1, \ldots, r_j \in \sigma$, o conjunto $\{f \in X \colon f(n_i) = r_i,\ i = 1, \ldots, j\}$ é fechado, e que F_n é reunião finita de conjuntos dessa forma, i.e. F_n é fechado. Ainda, a família de fechados $\{F_n\}_{n\in\omega}$ tem a propriedade da intersecção finita (segue de $F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_j} \supseteq F_{\bigcup n_i}$ e $F_{\bigcup n_i} \neq \emptyset$ por hipótese).

Como X é compacto, $\bigcap F_n \neq \emptyset$. Absurdo. ∎

4. Proposição. *Para qualquer κ infinito*

$$(2^k) \not\to (3)^2_\kappa.$$

Demonstração Identifique 2^κ com ${}^\kappa 2$. Defina $c(\{f, g\}) = \min\{\alpha \colon f(\alpha) \neq g(\alpha)\}$. ∎

5. Teorema (Erdős – Rado'56). *Para todo $\kappa \geq \omega$*

$$((2^\kappa)^+) \to (\kappa^+)^2_\kappa.$$

Aplicações

Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **c.c.c.** se toda família de abertos não-vazios 2-a-2 disjuntos é enumerável.

6. Teorema (Hajnal – Juhász). *Todo espaço topológico Hausdorff, c.c.c. que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade tem cardinalidade $\leq 2^\omega$.*

Demonstração Suponha $|X| > 2^\omega$ e tome $\{V_x^n : n < \omega\}$ base enumerável decrescente em x. Como X é Hausdorff, para quaisquer x, y distintos de X, existem $m, n < \omega$ tais que V_x^n e V_y^m são disjuntos. Supondo, sem perda de generalidade, que $n > m$ temos $V_x^n \cap V_y^n = \emptyset$. Defina uma coloração

$$\begin{aligned} c\colon & [X]^2 \to \omega \\ & \{x, y\} \rightsquigarrow n \text{ onde } n = \min\{m\colon V_x^m \cap V_y^m = \emptyset\}. \end{aligned}$$

De $|X| > 2^\omega$ e $((2^\omega)^+) \to (\omega_1)^2_\omega$ temos que existe $H \subseteq X$ tal que $c \restriction [H]^2 = \{k\}$ e $|H| = \omega_1 > \omega$. Agora, basta notar que $\left\{V_x^k : x \in H\right\}$ é uma família de abertos 2-a-2 disjuntos de cardinalidade $> \omega$. ■

Uma família $\mathcal{V}$ de abertos de X é uma **pseudo-base** para $p \in X$ se para todo $V \in \mathcal{V}$ $p \in V$ e $\bigcap \mathcal{V} = \{p\}$.

7. Teorema (Hajnal – Juhász). *Se X é um espaço topológico T_1 tal que todo subespaço discreto é enumerável e todo ponto admite pseudo-base enumerável, então $|X| \leq 2^\omega$.*

Demonstração Suponha $|X| > 2^\omega$ e tome $\{V_x^n : n < \omega\}$ pseudo-base enumerável decrescente em x. Então, para quaisquer x, y distintos de X, existem $m, n < \omega$ tais que $y \notin V_x^n$ e $x \notin V_y^m$. Supondo, sem perda de generalidade, que $n > m$ temos $y \notin V_x^n$ e $x \notin V_y^n$. Defina uma coloração

$$\begin{aligned} c\colon & [X]^2 \to \omega \\ & \{x, y\} \rightsquigarrow n \text{ onde } n = \min\{m\colon y \notin V_x^m \text{ e } x \notin V_y^m\}. \end{aligned}$$

De $|X| > 2^\omega$ e $((2^\omega)^+) \to (\omega_1)^2_\omega$ temos que existe $H \subseteq X$ tal que $c \restriction [H]^2 = \{k\}$ e $|H| = \omega_1 > \omega$. Agora, basta notar que para todo $x \in H$ temos $H \cap V_x^k = \{x\}$, portanto, H é um subespaço discreto de cardinalidade maior que ω. Absurdo. ■