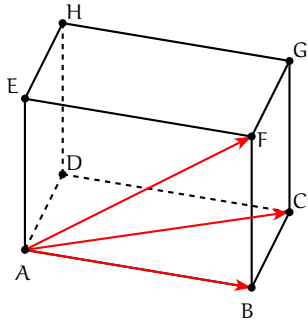


Lista 1 - Geometria Analítica

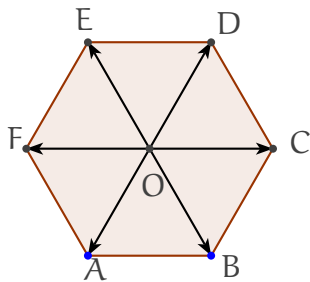
Vetores

1 — Sendo ABCDEFGH o paralelogramo abaixo, expresse os seguintes vetores em função de \vec{AB} , \vec{AC} e \vec{AF} :



- \vec{BF}
- \vec{AG}
- \vec{AE}
- \vec{BG}
- \vec{AG}
- $\vec{AB} + \vec{FG}$
- $\vec{AD} + \vec{HG}$
- $2\vec{AD} - \vec{FG} - \vec{BH} + \vec{GH}$

2 — Sendo ABCDEF um hexágono regular, como na figura abaixo. Expresse os seguintes vetores em função dos vetores \vec{DC} , \vec{DE}

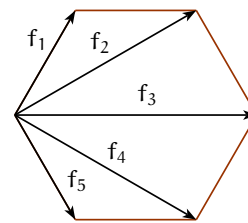


- \vec{DF}
- \vec{DA}
- \vec{DB}
- \vec{DO}
- \vec{EC}
- \vec{EB}
- \vec{OB}

3 — Sendo ABCDEF um hexágono regular, como no exercício anterior. Expresse os seguintes vetores em função dos vetores \vec{OD} , \vec{OE}

- $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}$
- $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA}$
- $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF}$
- $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OE}$
- $\vec{OC} + \vec{AF} + \vec{EF}$

4 — Dados os vetores $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_5$ os vetores que ligam um vértice de um hexágono regular aos outros vértices como mostra a figura abaixo. Determine a soma desses vetores em função dos vetores \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_3 .



5 — Dado um triângulo ΔABC , sejam M, N, P os pontos médios dos segmentos AB, BC e CA respectivamente. Exprima os vetores $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}$ e \overrightarrow{CM} em função dos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

6 — Dado um triângulo ΔABC , seja M um ponto do segmento AB . Suponha que o vetor \overrightarrow{AM} é igual a λ vezes o vetor \overrightarrow{MB} . Exprima o vetor \overrightarrow{CM} em função dos vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} .

7 — Dado um quadrilátero $ABCD$, tal que $\overrightarrow{AD} = 5\mathbf{u}$, $\overrightarrow{BC} = 3\mathbf{u}$ e tal que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

- determine o lado \overrightarrow{CD} e as diagonais \overrightarrow{BD} e \overrightarrow{CA} em função de \mathbf{u} e \mathbf{v}
- prove que $ABCD$ é um trapézio.

8 — Dado \mathbf{v} um vetor não nulo. Prove que $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que \mathbf{v}

9 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares resolva a equação nas incógnitas \mathbf{x} e \mathbf{y} , i.e., escreva os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} em função de \mathbf{u} e \mathbf{v} :

a)

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 2\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} \end{cases}$$

10 — Dados os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ e \mathbf{z} tais que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ e \mathbf{u} é paralelo a \mathbf{z} . Prove que \mathbf{w} é paralelo a \mathbf{z} se, e somente se, \mathbf{v} é paralelo a \mathbf{z} .

11 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares prove que:

- $(-\alpha)\mathbf{v} = -(\alpha\mathbf{v})$
- $\alpha(-\mathbf{v}) = -(\alpha\mathbf{v})$
- $-\alpha(-\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$

12 — Prove que $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então ou $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

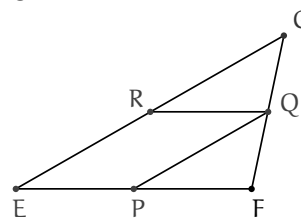
13 — Prove que se $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ então $\alpha = \beta$.

14 — Prove que dados dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} não paralelos então se

$$\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

15 — Se ΔEFG é um triângulo qualquer e P, Q e R são os pontos médios dos lados EF, FG e GE respectivamente, demonstrar que $EPQR$ é um paralelogramo



Respostas dos Exercícios

- 1 a.) $\vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF} \Rightarrow \vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB}$
 b.) $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AC} + \vec{BF} = \vec{AC} + \vec{AF} - \vec{AB}$
 c.) Como $\vec{AE} + \vec{EF} = \vec{AF}$ e $\vec{EF} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{AE} = \vec{AF} - \vec{AB}$
 d.) $\vec{BG} = \vec{BF} + \vec{FG}$
 e.) Dica: $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{BF}$
 f.) \vec{AC}
 g.) Dica: $\vec{AD} = \vec{BC}$ e $\vec{HG} = \vec{AB}$

- 2 a.) $\vec{DF} = \vec{DC} + \vec{CO} + \vec{OF} = \vec{DC} + 2\vec{DE}$
 c.) $\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{CO} + \vec{OB} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{DC} = 2\vec{DC} + \vec{DE}$
 e.) $\vec{EC} = \vec{ED} + \vec{DC} = -\vec{DE} + \vec{DC}$
 f.) $2\vec{DC}$ g.) \vec{DC}

- 3 a.) $\mathbf{0}$ b.) $\mathbf{0}$
 c.) \vec{OE}
 d.) $\mathbf{0}$

4 $3f_3$

5 $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$
 $\vec{BP} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$
 $\vec{CM} = -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

6 Note que:

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AM} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)\vec{AM}.$$

Daí:

$$\begin{aligned} \vec{CM} &= \vec{CA} + \vec{AM} \\ &= -\vec{AC} + \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{\lambda})}\right]\vec{AB} \\ &= -\vec{AC} + \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)(\vec{AC} - \vec{BC}) \\ &= -\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)\vec{AC} - \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\vec{BC}. \end{aligned}$$

7 a.)

$$\begin{aligned} \vec{CD} &= 2\mathbf{u} - \mathbf{v} \\ \vec{BD} &= 5\mathbf{u} - \mathbf{v} \end{aligned}$$

b.) Os lados AD e BC são paralelos.

9 a.) $x = \frac{4u}{7} + \frac{3v}{14}, y = \frac{u}{7} - \frac{v}{14}$ b.) $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{4}$

11 Dica: Use as propriedades S1-S4 e M1-M5 das notas, vide página 10.

a.) Dicas: Observe que $(-\alpha)\mathbf{v} + (\alpha\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (Porque?)

Conclua que $(-\alpha)\mathbf{v}$ é o oposto de $(\alpha\mathbf{v})$.

13 $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v} \Rightarrow$

$$\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$(\alpha - \beta)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

e logo $\|(\alpha - \beta)\mathbf{v}\| = |\alpha - \beta| \|\mathbf{v}\| = 0$

como $\|\mathbf{v}\| \neq 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$.

14 Dica: suponha $\lambda_1 \neq 0$ então $\mathbf{u} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v}$ e logo \mathbf{u} e \mathbf{v} são paralelos absurdo. Logo $\lambda_1 = 0$