Lista 6 - Geometria Analítica

Retas

Retas no Plano

1 —

a) Sejam $A = (1, 2)$ e $\mathbf{n} = (3, 4)$ ponto e vetor no plano, encontre a equação na forma reduzida da reta r perpendicular a $\mathbf{n}$ que contenha A (use que $X \in r$ se e somente se $\overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n} = 0$).

b) Mostre que, no plano, a equação da reta r (na forma reduzida) contendo $A = (x_0, y_0)$ perpendicular a $\mathbf{n} = (a, b)$ é:

$$ax + by = d,$$

onde $d = ax_0 + by_0$.

c) A reta que intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, b)$ sendo ambos os pontos distintos da origem. Mostre que a equação dessa reta pode ser escrita como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

d) Ache a equação da reta que passa a uma distância h da origem e cujo segmento de tamanho h forma um ângulo α como o eixo x.
Dica: Ache os pontos onde a reta intercepta o eixo x e o eixo y em termos de h, α e use o resultado do item a.

2 — Dado $A : (1, 2)$. Ache o ponto B tal que o triângulo OAB seja equilátero.

3 — Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 1 - x$. Ache os vértices desse triângulo.

4 — Os pontos $A = (2, 5)$ e $B = (14, 1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine a equação canônica e paramétrica dessa reta.

5 — Chama -se baricentro de um triângulo o ponto G de encontro das três medianas. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC nos seguintes casos.

a) $A = (1, 5)\,, B = (3, 2)\; C = (2, 4)$

b) $A = (x_1, y_1)\,, B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$

6 — O ponto em que duas retas não paralelas se encontram deve satisfazer ambas equações. Ache o ponto de intersecção de $3x - 4y = 1$ e $4x + 6y = 14$.

Nos próximos exercícios ache a equação da reta e desenhe uma figura de cada.

7 — A linha que passa por $(-5, 7)$ perpendicular a $4x - 5y = 10$.

8 — Duas retas por $(-2, 3)$, uma paralela e outra perpendicular a $3x + 2y + 5 = 0$

9 — A reta que passa por $(a, 0)$ perpendicular a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

10 — No triângulo de vértices $(a, 0)$, $(b, 0)$ e $(0, c)$:

a) ache as equações das três alturas;

b) ache as equações das três medianas;

c) prove que as três alturas se encontram num ponto H chamado ortocentro do triângulo, determinando suas coordenadas.

d) prove que as três medianas se encontram no baricentro G, determinando suas coordenadas.

11 — Ache duas linhas retas de inclinação $\frac{2}{3}$ que fazem com os eixos coordenados um triângulo de área $\frac{4}{3}$

12 — Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$ e $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

13 — Considere as retas r e s de equações cartesianas:

$r : ax + by = c$

$s : dx + ey = f$

Mostre que o ângulo α entre r e s obedece a equação:

$$\cos\alpha = \frac{|ad + be|}{\sqrt{(a^2 + b^2)(d^2 + e^2)}}$$

14 — Considere as retas r e s de equações cartesianas:

$r : ax + by = c$

$s : ax + by = d$

Mostre que a distância $d(r, s)$ entre r e s obedece a equação:

$$d(r, s) = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Retas no Espaço

15 — Determine as equações na forma paramétrica e na forma simétricas (quando existirem) das seguintes retas:

a) A reta que passa pelos pontos $A : (1, 4, -2)$ e $B : (0, 1, 1)$

b) A reta que passa pelos pontos $A : (1, 0, -2)$ e $B : (3, 1, 1)$

c) As retas que determinam os eixos x, y, z

d) A reta paralela ao eixo z que passa pelo ponto $(1, 2, 1)$

e) A reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(1, 2, 1)$

f) A reta paralela a reta $\frac{1-2x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{2z+1}{4}$ que passa pelo ponto $(2, 1, 0)$

g) A reta paralela a reta

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

que passa pelo ponto $(2, 1, 0)$

16 —

a) Determine equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (3, 0, 2)$ e $B = (1, 1, 1)$;

b) Encontre equações na forma simétrica da reta s paralela a r passando por $C = (0, 1, 1)$.

17 — Ache a equação da reta perpendicular ao plano que passa pelos pontos $A = (3, 4, 2)$, $B = (-1, 5, 3)$ e $C = (2, 1, 4)$ e que passe pela origem.

18 — Escreva as equações do movimento do ponto $P : (x, y, z)$ que começa em $(3, -1, -5)$ e que se move retilineamente e uniformemente na direção e sentido do vetor $(-2, 6, 3)$ com velocidade $v = 14$.

19 — Dados $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ vetores não nulos paralelos, ou seja, $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}'$. Mostre que $X = A + \mathbf{v}t$ e $X = A + \mathbf{v}'t$ são equações vetoriais para a mesma reta r.

20 — Duas partículas P_1 e P_2 se movem retilineamente e uniformemente. A primeira partícula inicia seu movimento em $A : (1, 1, 2)$ e se move com velocidade $v = 14$ na direção do vetor $(-3, 6, -2)$, a segunda partícula começa no ponto $B : (0, 1, 4)$ e se move com velocidade $v = 13$ na direção oposta ao vetor $(-4, -3, 12)$.

a) Escreva as equações de movimento para cada partícula.

b) Mostre que suas trajetórias se interceptam e ache o ponto P de intersecção.

c) Determine o tempo que a primeira partícula gasta para ir de A até P.

d) Determine o tempo que a segunda partícula gasta para ir de B até P.

21 — Escreva as equações do movimento do ponto $P : (x, y, z)$ que se move retilineamente e uniformemente e percorreu a distância distância entre os pontos $A = (-7, 12, 5)$ e $B = (9, -4, -3)$ no intervalo de tempo $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$.

22 — Dados $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$ determine a equação paramétrica da reta que passa por A e B. Determine também os pontos onde essa reta corta os planos coordenados XY, XZ e YZ.

23 — Identifique a linha cujas equações são $2x - 1 = 4y + 8 = 3z - 5$. Ache o vetor diretor e três pontos que pertençam a essa reta.

24 — Ache as equações vetorial e na forma paramétrica da reta

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 6 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

25 — Dadas as retas

$$r : x = y = z - 3 \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = -5 \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

escreva equações paramétricas da reta t, concorrente a r e s e paralela ao vetor $\mathbf{v} = (2, 0, 3)$

3 $(0,1)$, $(3,7)$ e $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

4 (*Dica*: $P=(8,3)$ e $\mathbf{v}=(1,3)$ são um ponto e um vetor diretor da reta procurada.)

5 b.) $G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

6 $P=\left(\frac{93}{51},\frac{19}{17}\right)$.

10 a.)(*Dica*: Altura relativa a $(a,0)$ tem $\mathbf{v}=(c,b)$ como vetor diretor.)
b.) Mediana relativa a $(a,0)$:

$$\left(-\frac{c}{2}\right)x+\left(\frac{b}{2}-a\right)y=-\frac{ac}{2}.$$

11 (*Dica*: A reta passa pelos pontos $(a,0)$ e $\left(0,-\frac{2}{3}a\right)$, e a área referida é $\frac{1}{3}a^2$.)

12 $a=1$, $b=2$.

13 (*Dica*: Use o produto escalar para estudar o ângulo entre os vetores $\mathbf{n_1}=(a,b)$ e $\mathbf{n_2}=(d,e)$.)

14 (*Dica*: Considere $A,B\in r$ e $C\in s$, calcule a altura do paralelogramo de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.)

15 c.)

$$Ox:\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

d.)

$$r:\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1+t\end{cases}$$

17 (*Dica*: $r:X=(0,0,0)+t(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$.)

18 MRU: $S=S_0+\mathbf{v}t$

$$P=(3,-1,-5)+t(-4,12,6)$$

19 (*Dica*: Mostre que as retas são paralelas e passam pelo mesmo ponto sendo assim coincidentes.)

20 a.)

$$P_1:X=(1,1,2)+t(-6,12,-4)$$
$$P_2:Y=(0,1,4)+t(4,3,-12)$$

b.) Intersectam, pois $(6,-12,4),(4,-12,3)$ e $\overrightarrow{AB}$ são LD. $P=\left(\frac{8}{11},\frac{17}{11},\frac{20}{11}\right)$.
c.)$t=\frac{1}{22}$.
d.)$t=\frac{2}{11}$.

21 (*Dica*: $\mathbf{v}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $S_0=A-\mathbf{v}$.)

22 (*Dica*: $XY:z=0$, $XZ:y=0$, $YZ:x=0$.)

24 $r:X=(0,-18,-6)+t(1,19,7)$.

25 (*Dica*: Tome $A\in r$, $B\in s$ e use que $\overrightarrow{AB}=\lambda(2,0,3)$ para obter um sistema com 3 equações a 3 incóginitas que dará os pontos de intersecção de t com r e s.)
(Resolução alternativa usando planos: Encontre os planos π_1 contendo r paralelo a $\mathbf{v}$ e π_2 contendo s paralelo a $\mathbf{v}$. Observe que $t=\pi_1\cap\pi_2$.)