Lista 8 - Geometria Analítica

Posição Relativa, Distância e Ângulos

1 — Estude a posição relativa das retas r e s. Se as retas forem concorrentes encontre o ponto de intersecção delas.

a) $r : (1,4,4) + (1,2,3)t$ e $s : (2,5,1) + (2,4,6)t$

b) $r : X = (3,0,1) + t(0,-1,1)$, $s : \frac{x-2}{2} = y = z$.

c) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \frac{z-1}{4}$

d) $r : x - 1 = y - 3 = \frac{z-1}{2}$, $s : \frac{x-1}{3} = y - 1 = \frac{z}{5}$

e) $r : X = (3,0,2) + t(1,1,-2)$

$$s : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

2 — Dadas as retas $r : X = (0,1,0) + \lambda(1,0,0)$ e $s : X = (-1,2,-7) + \lambda(2,1,-3)$, obtenha uma equação vetorial da reta t, concorrente com r e s e paralela a $\vec{u} = (1,-5,-1)$.

3 — Mostre que a reta

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -4t + 1 \\ z = 4t - 5 \end{cases}$$

é paralela ao plano $4x - 3y - 6z - 5 = 0$

4 — Determine a equação do plano contendo a reta

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$$

e paralelo a reta $x = -\frac{y}{6} = \frac{z}{7}$

5 — Encontre o ponto de intersecção da reta dada com o plano dado:

a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$, $\quad 2x + 3y + z - 1 = 0$

b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$, $\quad x - 2y + z - 15 = 0$

6 — Escreva as equações do plano que passa por $(1,2,-3)$ e é paralelo as retas:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \qquad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$$

7 — Prove que as retas:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-5}{6} \quad \text{e}$$

$$(x,y,z) = (3t-7, 2t+2, -2t+1)$$

são coplanares e determine a equação desse plano.

8 — Mostre que a reta:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4y + 5y = 8 \end{cases}$$

está contida no plano $2x + 3y + 4z = 8$.

9 — Ache o ângulo agudo entre as retas $3x - 4y + 2 = 0$ e $2x + 3y = 7$

10 — Qual o ângulo entre o eixo x e $5x + 12 = 3$?

11 — Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(1, -2, 1)$ e é ortogonal as retas $r : (1, -3, 0) + (1, 2, 1)t$ e $s : (-2, 1, 0) + (1, -1, 1)t$.

12 — Determine as equações paramétricas da reta perpendicular as retas:

$$r : \begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = -2t - 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$$

e

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

13 — Ache os ângulos entre os planos:

a) $3x - y + z = 2$ e $x - y = 6$

b) $x + 2y - 3z = 8$ e $2x + 4y - 6z + 31 = 0$

c) $x = 0$ e $y = 0$

d) $x = 1$ e $x + y = 1$

14 — Ache as distâncias entre os pontos e as retas dadas:

a) $(-3, 4)$ a $5x - 2y = 3$.

b) $(-2, 5)$ a $7x + 3 = 0$.

c) Origem a $3x - 2y + 6 = 0$.

15 — Determine a distância δ entre o ponto $A = (3, 1)$ e a reta $r : x + 2y = 3$, pelo seguinte método:

a) Encontre a equação da reta s, perpendicular a reta r e contendo o ponto A;

b) Ache o ponto B dado pela intersecção de r e s;

c) Calcule a distância entre A e B.

16 — Ache a distância entre as duas retas paralelas: $3x + 2y = 6$ e $6x + 4y = 9$. (Porque essas retas são paralelas?)

17 — Determine a distância entre os planos dados e a origem:

a) $x = 5$

b) $x + y = 1$

c) $2x + y - z = 0$

d) $2x + y + z = 2$

18 — Determinar a distância d do plano $\pi : 3x - 12y + 4z - 3 = 0$ ao ponto $A = (3, -1, 2)$ pelo seguinte processo:

a) Encontrar a equação da reta r, perpendicular ao plano π, contendo A;

b) Encontrar o ponto B , pé da perpendicular por A no plano.

c) Determinar d como o comprimento do segmento AB.

19 — Ache a distância entre os planos paralelos

a) $4x + 8y + z = 9$ e $4x - 8y + z + 18 = 0$

b) $3x - 2y + 6z + 8 = 0$ e $6x - 4y + 12z + 12 = 0$

20 — a) Prove que a distância entre duas retas paralelas cujas equações são $Ax + By + C = 0$ e $Ax + By + C' = 0$ é:

$$\frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

b) Prove que a distância entre dois planos paralelos cujas equações são $Ax + By + Cz + D = 0$ e $Ax + By + Cz + D' = 0$ é:

$$\frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

21 — Determinar a distância do ponto a reta:

a) ponto $(2, 2, 2)$ à reta

$$r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 5t + 1 \end{cases}$$

b) ponto $(-1, 2, 3)$ à reta $\frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{3}$

c) ponto $(7, 7, 4)$ à reta $6x + 2y + z - 4 = 0$ e $6x - y - 2z - 10 = 0$

22 — Ache os pontos sobre o eixo y que distam 4 do plano $x + 2y - 2z = 0$.

23 — Determine a distância entre as retas r que tem equação paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 5t + 1 \end{cases}$$

e a reta s que tem equação paramétrica:

$$s : \begin{cases} x' = 4s + 1 \\ y' = 2s + 2 \\ z' = 1s + 5 \end{cases}$$

24 — Ache a equação da reta que passa pelo ponto $(2, 1, 5)$ e que intercepta a reta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

perpendicularmente.

25 — Ache as equações dos planos paralelos ao plano $3x - 2y + 6z + 8 = 0$ e que distam 2 desse plano.

Exercícios Complementares

26 — Determine o ponto de intersecção entre a reta que passa pelos pontos $(3, 0, 1)$ e $(1, 2, 1)$ e a reta que passa pelos pontos $(4, 1, -1)$ e $(1, 1, 2)$.

27 — A altura e a mediana relativas ao vértice B do triângulo ABC estão contidas, respectivamente, em $r : X = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0)$ e $s : X = (0, 0, 3) + \mu(3, -2, 0)$. Sendo $C = (4, -1, 3)$, determine A e B.

28 — Sejam r a reta representada parametricamente por $x = at + c$ e $y = bt + d$ e s a reta cuja equação é $\alpha x + \beta y = \gamma$.

a) Quando r intersepta s?

b) Se r interceptar s determine o ponto P de intersecção entre as duas retas.

29 — Mostre que a reta

$$\frac{x+10}{3} = 6 - y = z - 1$$

intersecciona os planos $\pi_1 : 6x + 4y - 5z = 4$ e $\pi_2 : x - 5y + 2z = 12$ no mesmo ponto. Conclua que essa reta é coplanar com a reta determinada pela intersecção desses planos.

30 — Mostre que a equação do plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralelo as retas:

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{l_2} = \frac{z - c_1}{l_3}$$

$$\frac{x-a_2}{m_1}=\frac{y-b2}{m_2}=\frac{z-c_2}{m_3}$$

pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}=0.$$

31 — Determine os valores de a e b de modo que os planos $x+2y+z=b$ e $3x-5y+3z=1$ e $2x+7y+az=8$ se interceptem:

a) um ponto

b) uma reta

c) três retas distintas e paralelas

32 — Ache duas retas passando por $(1,-1)$ que faz um ângulo de 45º com $3x-4y=7$.

33 — Ache os três ângulos de um triângulo cujos vértices são $(2,1),(-1,2),(3,-2)$. Veja se eles somam 180º

34 — Escreva a equação da reta que passa pela origem e faz um angulo de 45º com a reta $\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2}=1$.

35 — Mostre que o segmento retilíneo que une os pontos médios de dois lados opostos de qualquer quadrilátero e o segmento retilíneo que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero cortam se mutualmente ao meio.

36 — Ache a equação do plano perpendicular ao plano Oxz, que contém o ponto $(1,2,3)$ e que faz um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com $3x+2y+z=1$.

37 — Ache o comprimento das alturas de um triângulo com vértices $(a,0),(b,0),(0,c)$.

38 — Ache os pontos da reta $y=2x+1$ que estão situados a distância 2 da origem.

39 — Se a distância da origem a um plano é d, e esse plano intercepta os eixos em $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ e $(0,0,c)$ prove que:

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

40 — Determine as equação da reta que passa pelo ponto $(3,1)$ e tal que a distância desta reta ao ponto $(-1,1)$ é igual a $2\sqrt{2}$. (Duas soluções)

1 **a.)**Paralelas.
b.) Concorrentes, $P = (3, 1/2, 1/2)$.
c.) Reversas.
d.) Concorrentes, $P = (-2, 0, -5)$.
e.) Coincidentes.

4 $138x + 23y = 368$.

7 $y - z = -7$.

8 *Dica*: Mostre que o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4y + 5y = 8 \\ 2x + 3y + 4z = 8 \end{cases}$$

admite infinitas soluções.

9 $\arccos\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right)$.

13 **a.)**$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{22}}\right)$.

14 **a.)**$\frac{26}{\sqrt{29}}$.

16 $\frac{3}{2\sqrt{13}}$

17 **d.)**$\frac{2}{\sqrt{6}}$.

21 **b.)**7.

22 $(0, \pm 6, 0)$.

23 [*Dica*: Calcule a distância de $A = (1, 2, 1)$ ao plano contendo s paralelo a r.]

26 $P = (2, 1, 1)$.

28 **a.)**$t = \frac{\gamma - \alpha c - \beta d}{\alpha a + \beta b}$.

31 **a.)**$a \neq 2$ (Regra de Cramer).
b.)$a = 2$, $b = 9/5$.
c.)$a = 2$, $b \neq 9/5$.

34 $x + (-\sqrt{3} \pm 2)y = 0$.

36

$$x + \left(\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}\right) z = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$