1ª Prova de Geometria Analítica - B1 - Professora: Juliana Pimentel - 20.10.2017		
NOME:	RA:	NOTA:

Regras: 1 - Não é permitido o uso de calculadoras.
2 - Somente serão aceitas as resoluções feitas nas folhas anexas.

01ª Questão (Valor 2.5) Sejam A, B, C, D vértices de um paralelogramo. Os pontos E e G são tais que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$. F é o ponto de encontro de $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{DE}$. Escreva $\overrightarrow{AF}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

02ª Questão (Valor 2.5) Considere os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ tais que

1. $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$; e
2. $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{z}$.

Prove que $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{z}$ se, e somente se, $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{z}$.

03ª Questão (Valor 2.5) Seja $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base de V.

(a) Demonstre que $C = \{\vec{u}, \alpha\vec{v} + \vec{w}, \alpha\vec{u} + \vec{v}\}$ é também uma base de V, qualquer que seja α.

(b) Determine, em função de α, as coordenadas de $\vec{w}$ em relação a C.

04ª Questão (Valor 2.5) Prove a seguinte propriedade do produto misto

$$(\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

BOA PROVA!

1ª Prova de Geometria Analítica - Turma BL

1ª Questão

$* \ \vec{AF} = \alpha \vec{AG} = \alpha(\vec{AD} + \vec{DG}) \Rightarrow$

$\vec{AF} = \alpha \vec{AD} + \frac{3}{4}\alpha \vec{AB} \quad (I)$

$* \ \vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF} = \vec{AD} + \beta \vec{DE} = \vec{AD} + \beta(\vec{DA} + \vec{AE}) \Rightarrow$

$\vec{AF} = (1-\beta)\vec{AD} + \frac{2}{5}\beta \vec{AB}. \quad (II)$

Igualando (I) e (II), obtemos

$$\alpha \vec{AD} + \frac{3}{4}\alpha \vec{AB} = (1-\beta)\vec{AD} + \frac{2}{5}\beta \vec{AB}$$

Logo

$$\begin{cases} \alpha = 1-\beta \\ \frac{3}{4}\alpha = \frac{2}{5}\beta \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{8}{23} \\ \beta = \frac{15}{23} \end{cases}$$

Substituindo α em (I) ou β em (II) obtemos

$$\boxed{\vec{AF} = \frac{8}{23}\vec{AD} + \frac{6}{23}\vec{AB}}$$

2ª Questão

Hipóteses: $\begin{cases} \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{u} \,//\, \vec{z} \text{ (ou seja, } \vec{u} = \alpha \vec{z}\text{)} \end{cases}$

($\Rightarrow$) Suponha $\vec{w} \,//\, \vec{z}$, ou seja, $\vec{w} = \beta \vec{z}$. Então

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$\beta \vec{z} = \alpha \vec{z} + \vec{v}$$
$$\vec{v} = (\beta - \alpha)\vec{z}$$

Logo $\boxed{\vec{v} \,//\, \vec{z}}$.

($\Leftarrow$) Suponha $\vec{v} \,//\, \vec{z}$, ou seja, $\vec{v} = \gamma \vec{z}$. Então

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$\vec{w} = \alpha \vec{z} + \gamma \vec{z}$$
$$\vec{w} = (\alpha + \gamma)\vec{z}$$

Logo $\boxed{\vec{w} \,//\, \vec{z}}$.

3ª Questão

(a) $\vec{u} = (1, 0, 0)_B$

$\alpha \vec{v} + \vec{w} = (0, \alpha, 1)_B$

$\alpha \vec{u} + \vec{v} = (\alpha, 1, 0)_B$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, então

C é uma base de V, para qualquer α.

(b) Queremos encontrar a, b, c tais que

$$\vec{w} = a(\vec{u}) + b(\alpha\vec{v} + \vec{w}) + c(\alpha\vec{u} + \vec{v}).$$

Em coordenadas na base $\mathcal{B}$, temos

$$(0,0,1)_{\mathcal{B}} = a(1,0,0)_{\mathcal{B}} + b(0,\alpha,1)_{\mathcal{B}} + c(\alpha,1,0)_{\mathcal{B}}$$

$$= (a+\alpha c, \alpha b + c, b)_{\mathcal{B}}$$

Logo,

$$\begin{cases} 0 = a + \alpha c & \Rightarrow 0 = a + \alpha.(-\alpha) \Rightarrow a = \alpha^2 \\ 0 = \alpha b + c & \Rightarrow 0 = \alpha + c \Rightarrow c = -\alpha \\ 1 = b \end{cases}$$

e $\boxed{\vec{w} = (\alpha^2, 1, -\alpha)_{\mathcal{C}}}$

$\boxed{\text{4ª Questão}}$

Observe que $\vec{u} \times \vec{u} \overset{①}{=} \vec{0}$, para qualquer vetor $\vec{u}$, e $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} \overset{②}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pois $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$. Logo

$$(\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} + \vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overset{①}{=} \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\overset{②}{=} \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$