Funções reais: exemplos

Juliana Pimentel

juliana.pimentel@ufabc.edu.br

25 de julho de 2016

Funções lineares

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação: A representação gráfica de uma função afim é uma reta.

Exemplos

1. Seja b um número real fixado. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = b,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma função **constante.**

2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, é a função **identidade.**

3. Seja $a \neq 0$ um número real fixado. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = ax,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma função **linear.**

Monotonicidade

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que:

- f é crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

- f é decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

- f é não-decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

- f é não-crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

Observações: Uma função afim $f(x) = ax + b$ é crescente quando $a > 0$ e descrescente quando $a < 0$ (e é, portanto, injetora nesses casos).

Exemplos

1. A função $f(x) = x$ é

Exemplos

1. A função $f(x) = x$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois para todo par $a, b \in \mathbb{R}$, é verdade que:

$$a < b \Rightarrow f(a) = a < b = f(b).$$

2. A função $f(x) = x^2$ é

Exemplos

1. A função $f(x) = x$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois para todo par $a, b \in \mathbb{R}$, é verdade que:

$$a < b \Rightarrow f(a) = a < b = f(b).$$

2. A função $f(x) = x^2$ é decrescente em $(-\infty, 0]$, pois

$$a < b \Rightarrow a^2 > b^2 \Rightarrow f(a) > f(b).$$

   A mesma função é

Exemplos

1. A função $f(x) = x$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois para todo par $a, b \in \mathbb{R}$, é verdade que:

$$a < b \Rightarrow f(a) = a < b = f(b).$$

2. A função $f(x) = x^2$ é decrescente em $(-\infty, 0]$, pois

$$a < b \Rightarrow a^2 > b^2 \Rightarrow f(a) > f(b).$$

   A mesma função é crescente em $[0, \infty)$.

3. A função módulo $f(x) = |x|$ é

Exemplos

1. A função $f(x) = x$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois para todo par $a, b \in \mathbb{R}$, é verdade que:

$$a < b \Rightarrow f(a) = a < b = f(b).$$

2. A função $f(x) = x^2$ é decrescente em $(-\infty, 0]$, pois

$$a < b \Rightarrow a^2 > b^2 \Rightarrow f(a) > f(b).$$

   A mesma função é crescente em $[0, \infty)$.

3. A função módulo $f(x) = |x|$ é crescente em $[0, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0]$.

Exemplos de funções

- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se polinomial quando existem números reais $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tais que $f(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- O quociente de duas funções polinomiais é chamado de função racional (exemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$).

Periodicidade

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se existe $\tau > 0$ tal que $f(x + \tau) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação: O menor $\tau > 0$ (se existir) é denominado o período de f.

Exemplos de funções periódicas

- Toda função constante é periódica (mas não possui período).
- A função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, tem período 1.
- A função escada $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é periódica?

Funções monótonas

- A função escada (ou piso) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é não-decrescente em $\mathbb{R}$.

Funções monótonas

- A função escada (ou piso) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é não-decrescente em $\mathbb{R}$.
- Seja a um número inteiro, então $f(a) = \lfloor a \rfloor = a$, e considere $b > a$. Se $b - 1 < 1$, então $\lfloor b \rfloor = a$, porém, se $b - a \geq 1$, então $\lfloor b \rfloor > a$. Observe que a função piso no conjunto $\mathbb{Z}$ é

Funções monótonas

- A função escada (ou piso) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é não-decrescente em $\mathbb{R}$.
- Seja a um número inteiro, então $f(a) = \lfloor a \rfloor = a$, e considere $b > a$. Se $b - 1 < 1$, então $\lfloor b \rfloor = a$, porém, se $b - a \geq 1$, então $\lfloor b \rfloor > a$. Observe que a função piso no conjunto $\mathbb{Z}$ é crescente .

Funções monótonas

- A função escada (ou piso) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é não-decrescente em $\mathbb{R}$.
- Seja a um número inteiro, então $f(a) = \lfloor a \rfloor = a$, e considere $b > a$. Se $b - 1 < 1$, então $\lfloor b \rfloor = a$, porém, se $b - a \geq 1$, então $\lfloor b \rfloor > a$. Observe que a função piso no conjunto $\mathbb{Z}$ é crescente .
- Dizemos que uma função é monótona em A (também dita monotônica em A) se ela for crescente, não-decrescente, decrescente ou não-crescente em A.

Funções monótonas

- A função escada (ou piso) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é não-decrescente em $\mathbb{R}$.

- Seja a um número inteiro, então $f(a) = \lfloor a \rfloor = a$, e considere $b > a$. Se $b - 1 < 1$, então $\lfloor b \rfloor = a$, porém, se $b - a \geq 1$, então $\lfloor b \rfloor > a$. Observe que a função piso no conjunto $\mathbb{Z}$ é crescente .

- Dizemos que uma função é monótona em A (também dita monotônica em A) se ela for crescente, não-decrescente, decrescente ou não-crescente em A.

- Se a função for crescente ou decrescente em A, dizemos que ela é estritamente monótona em A.

Exercício

Seja $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Determine o maior domínio para o qual ela pode ser definida e os intervalos onde ela é monótona.

O domínio de f é $Dom(f) =$

Exercício

Seja $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Determine o maior domínio para o qual ela pode ser definida e os intervalos onde ela é monótona.

O domínio de f é $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} =$

Exercício

Seja $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Determine o maior domínio para o qual ela pode ser definida e os intervalos onde ela é monótona.

O domínio de f é $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Para verificar onde f é monótona, precisamos considerar os casos: crescente, não-decrescente, decrescente ou não-crescente.

Continuação...

Crescente: Para que f seja crescente em um intervalo I é preciso que, para todo $a < b$ em I valha $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Logo, por hipótese, temos $a < b$. Queremos chegar à tese $f(a) < f(b)$.

Continuação...

Crescente: Para que f seja crescente em um intervalo I é preciso que, para todo $a < b$ em I valha $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Logo, por hipótese, temos $a < b$. Queremos chegar à tese $f(a) < f(b)$. Observe que $f(a) < f(b)$ é equivalente a $\frac{a-b}{(a+1)(b+1)} < 0$.

Continuação...

Crescente: Para que f seja crescente em um intervalo I é preciso que, para todo $a < b$ em I valha $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Logo, por hipótese, temos $a < b$. Queremos chegar à tese $f(a) < f(b)$. Observe que $f(a) < f(b)$ é equivalente a $\frac{a-b}{(a+1)(b+1)} < 0$. Temos,

$$a < b \Rightarrow a + 1 < b + 1 \text{ e } a - b > 0.$$

Logo para que $\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}$ seja negativo é preciso que

1. $a + 1 < b + 1 < 0$, ou que
2. $0 < a + 1 < b + 1$.

Nos casos 1 e 2, temos que

1. $b + 1 < 0$, ou seja, $b < -1$, ou seja, $a < b < -1$ $(a, b \in (-\infty, -1))$
2. $a + 1 > 0$, ou seja, $a > -1$, ou seja, $b > a > -1$ $(a, b \in (-1, \infty))$

Logo, a função é crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, \infty)$.

Continuação...

Observe que, neste caso, não podemos dizer que a função é crescente em $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ pois a implicação

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

não vale para todo a, b na união dos intervalos. Um contra-exemplo é obtido com

$$a = -2 \text{ e } b = 0 \text{ pois } f(a) = 2 > 0 = f(b).$$

Continuação...

Observe que, neste caso, não podemos dizer que a função é crescente em $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ pois a implicação

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

não vale para todo a, b na união dos intervalos. Um contra-exemplo é obtido com

$$a = -2 \text{ e } b = 0 \text{ pois } f(a) = 2 > 0 = f(b).$$

Não-decrescente: como a função é crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, \infty)$, ela também é não-decrescente em cada um destes intervalos.

Continuação...

Observe que, neste caso, não podemos dizer que a função é crescente em $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ pois a implicação

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

não vale para todo a, b na união dos intervalos. Um contra-exemplo é obtido com

$$a = -2 \text{ e } b = 0 \text{ pois } f(a) = 2 > 0 = f(b).$$

Não-decrescente: como a função é crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, \infty)$, ela também é não-decrescente em cada um destes intervalos. Decrescente: não há nenhum intervalo onde ela é descrescente.

Continuação...

Observe que, neste caso, não podemos dizer que a função é crescente em $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ pois a implicação

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

não vale para todo a, b na união dos intervalos. Um contra-exemplo é obtido com

$$a = -2 \text{ e } b = 0 \text{ pois } f(a) = 2 > 0 = f(b).$$

Não-decrescente: como a função é crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, \infty)$, ela também é não-decrescente em cada um destes intervalos. Decrescente: não há nenhum intervalo onde ela é descrescente. Não-crescente: não há nenhum intervalo onde ela é não-crescente.

Continuação...

Observe que, neste caso, não podemos dizer que a função é crescente em $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ pois a implicação

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

não vale para todo a, b na união dos intervalos. Um contra-exemplo é obtido com

$$a = -2 \text{ e } b = 0 \text{ pois } f(a) = 2 > 0 = f(b).$$

Não-decrescente: como a função é crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, \infty)$, ela também é não-decrescente em cada um destes intervalos. Decrescente: não há nenhum intervalo onde ela é descrescente. Não-crescente: não há nenhum intervalo onde ela é não-crescente. Conclusão: a função é monótona no intervalo $(-\infty, -1)$ e no intervalo $(-1, \infty)$, mas não é monótona em $(-\infty, -1)$ e em $(-1, \infty)$.