Bases Matemáticas

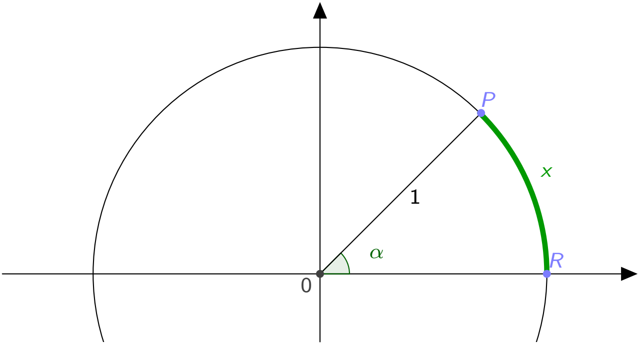
Aula 15 – Funções trigonométricas

Rodrigo Hausen

21 de novembro de 2012

Medida de um ângulo em radianos

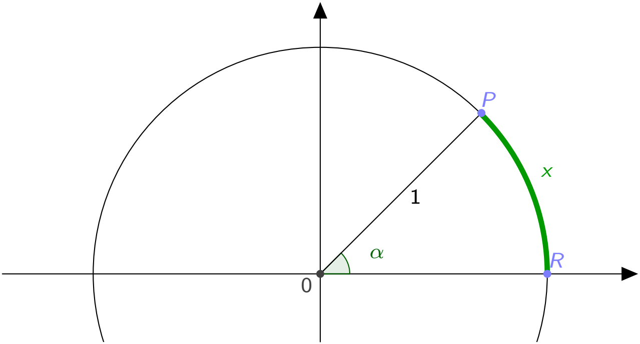
Ângulo α delimita um arco $\overset{\frown}{PR}$ no círculo trigonométrico (círculo de raio 1 e centro na origem).



Medida de α: comprimento do arco $\overset{\frown}{PR}$ medido no sentido anti-horário

Medida de um ângulo em radianos

Ângulo α delimita um arco $\overset{\frown}{PR}$ no círculo trigonométrico (círculo de raio 1 e centro na origem).

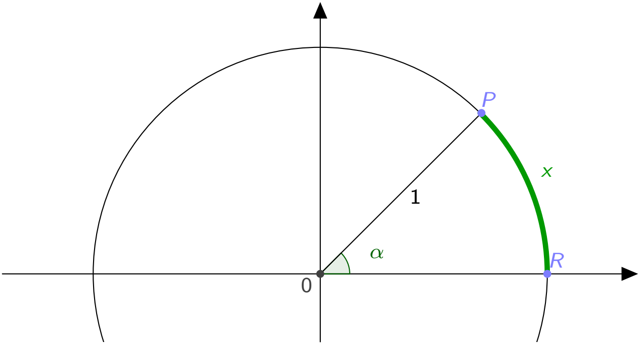


Medida de α: comprimento do arco $\overset{\frown}{PR}$ medido no sentido anti-horário

Medida de α: x rad

Medida de um ângulo em radianos

Ângulo α delimita um arco $\widehat{PR}$ no círculo trigonométrico (círculo de raio 1 e centro na origem).

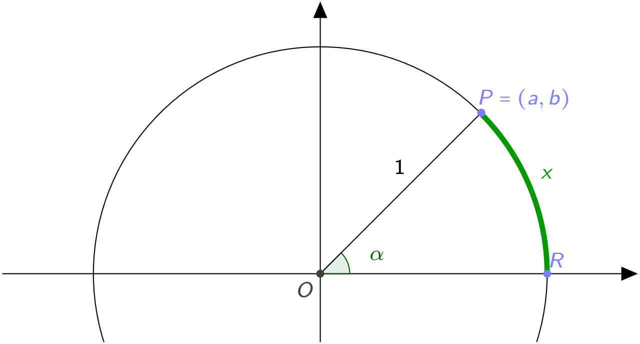


Medida de α: comprimento do arco $\widehat{PR}$ medido no sentido anti-horário

Medida de α: x rad (giro completo: 2π rad)

Definição das funções seno e cosseno

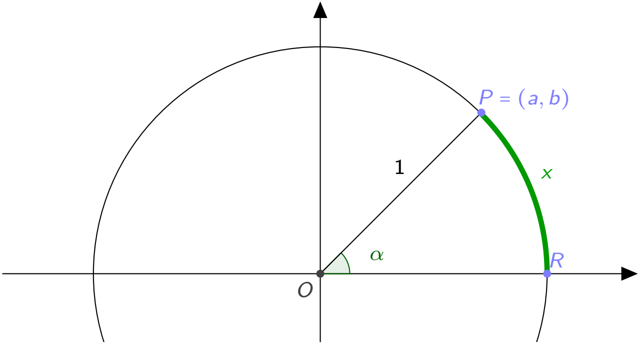
Dado o arco $\widehat{PR}$ de comprimento x no círculo unitário, onde P tem coordenadas (a, b), definimos as funções $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:



Definição das funções seno e cosseno

Dado o arco $\widehat{\mathrm{PR}}$ de comprimento x no círculo unitário, onde P tem coordenadas (a, b), definimos as funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

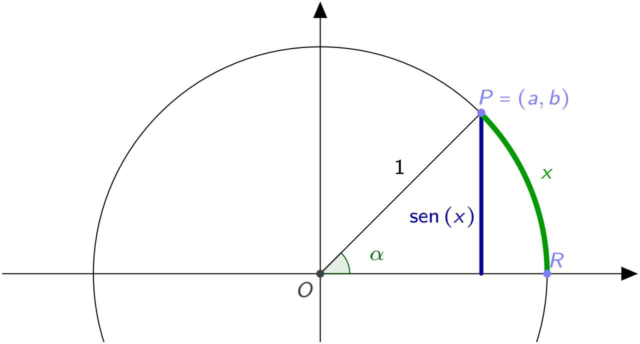
$$\operatorname{sen}(x) = b$$



Definição das funções seno e cosseno

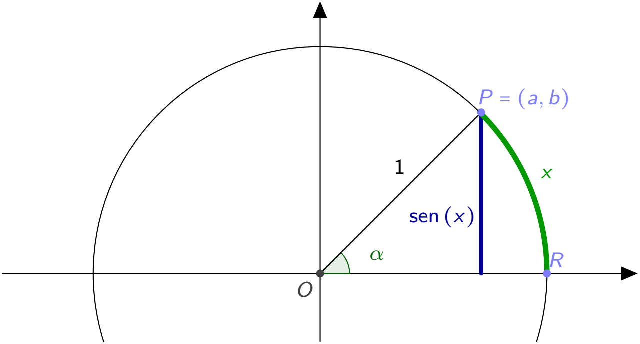
Dado o arco $\widehat{PR}$ de comprimento x no círculo unitário, onde P tem coordenadas (a, b), definimos as funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$\operatorname{sen}(x) = b$$



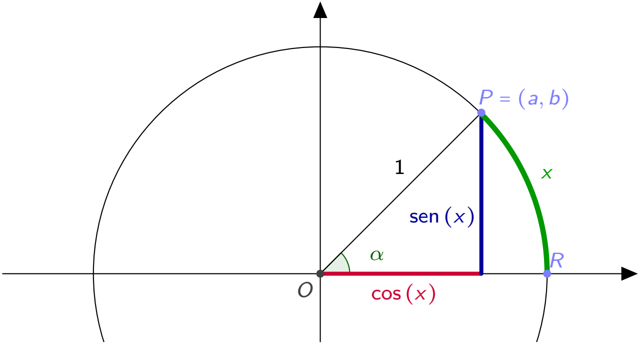
Dado o arco $\widehat{\mathrm{PR}}$ de comprimento x no círculo unitário, onde P tem coordenadas (a, b), definimos as funções $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$\mathrm{sen}\,(x) = b$ $\qquad$ $\cos\,(x) = a$



Dado o arco $\widehat{PR}$ de comprimento x no círculo unitário, onde P tem coordenadas (a, b), definimos as funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

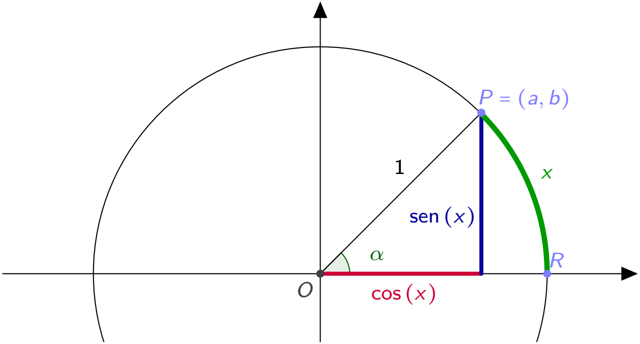
$\operatorname{sen}(x) = b$ $\qquad$ $\cos(x) = a$



Definição das funções seno e cosseno

Dado o arco $\overset{\frown}{PR}$ de comprimento x no círculo unitário, onde P tem coordenadas (a, b), definimos as funções $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$\text{sen}(x) = b$ $\qquad\qquad$ $\cos(x) = a$



A partir da definição, temos a seguinte propriedade:

$$[\text{sen}(x)]^2 + [\cos(x)]^2 = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

também denotada $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$

Valores notáveis

x	$\text{sen}\,(x)$	$\cos\,(x)$
0		

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)		

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$ (ângulo reto)		

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$ (ângulo reto)	1	0

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$ (ângulo reto)	1	0
π (ângulo raso)		

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$ (ângulo reto)	1	0
π (ângulo raso)	0	-1

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$ (ângulo reto)	1	0
π (ângulo raso)	0	-1
$3\pi/2$		

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$ (ângulo reto)	1	0
π (ângulo raso)	0	-1
$3\pi/2$	-1	0

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$ (ângulo reto)	1	0
π (ângulo raso)	0	-1
$3\pi/2$	-1	0
2π (giro completo)		

Valores notáveis

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\pi/4$ (metade ângulo reto)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$ (ângulo reto)	1	0
π (ângulo raso)	0	-1
$3\pi/2$	-1	0
2π (giro completo)	0	1

Propriedades do seno e do cosseno

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Propriedades do seno e do cosseno

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\text{Im sen} = [-1; 1]$

Propriedades do seno e do cosseno

- $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\operatorname{Im} \operatorname{sen} = [-1; 1]$
- $\operatorname{Im} \cos = [-1; 1]$

Propriedades do seno e do cosseno

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\text{Im sen} = [-1; 1]$
- $\text{Im cos} = [-1; 1]$
- $\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

Propriedades do seno e do cosseno

- $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\operatorname{Im} \operatorname{sen} = [-1; 1]$
- $\operatorname{Im} \cos = [-1; 1]$
- $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

Propriedades do seno e do cosseno

- $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\operatorname{Im} \operatorname{sen} = [-1; 1]$
- $\operatorname{Im} \cos = [-1; 1]$
- $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (seno é função ímpar)

Propriedades do seno e do cosseno

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\text{Im sen} = [-1; 1]$
- $\text{Im cos} = [-1; 1]$
- $\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\,(x + 2k\pi) = \cos\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (seno é função ímpar)
- $\cos\,(-x) = \cos\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (cosseno é função par)

Propriedades do seno e do cosseno

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\text{Im sen} = [-1; 1]$
- $\text{Im cos} = [-1; 1]$
- $\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\,(x + 2k\pi) = \cos\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (seno é função ímpar)
- $\cos\,(-x) = \cos\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (cosseno é função par)
- $\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\,(x)\cos\,(y) + \text{sen}\,(y)\cos\,(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Propriedades do seno e do cosseno

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\text{Im sen} = [-1; 1]$
- $\text{Im cos} = [-1; 1]$
- $\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\,(x + 2k\pi) = \cos\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (seno é função ímpar)
- $\cos\,(-x) = \cos\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (cosseno é função par)
- $\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\,(x)\cos\,(y) + \text{sen}\,(y)\cos\,(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\text{sen}\,(x - y) = \text{sen}\,(x)\cos\,(y) - \text{sen}\,(y)\cos\,(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Propriedades do seno e do cosseno

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\text{Im sen} = [-1; 1]$
- $\text{Im cos} = [-1; 1]$
- $\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\,(x + 2k\pi) = \cos\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (seno é função ímpar)
- $\cos\,(-x) = \cos\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (cosseno é função par)
- $\text{sen}\,(x+y) = \text{sen}\,(x)\cos\,(y) + \text{sen}\,(y)\cos\,(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\text{sen}\,(x-y) = \text{sen}\,(x)\cos\,(y) - \text{sen}\,(y)\cos\,(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\cos\,(x+y) = \cos\,(x)\cos\,(y) - \text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Propriedades do seno e do cosseno

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\text{Im sen} = [-1;1]$
- $\text{Im cos} = [-1;1]$
- $\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\,(x + 2k\pi) = \cos\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (seno é função ímpar)
- $\cos\,(-x) = \cos\,(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (cosseno é função par)
- $\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\,(x)\cos\,(y) + \text{sen}\,(y)\cos\,(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\text{sen}\,(x - y) = \text{sen}\,(x)\cos\,(y) - \text{sen}\,(y)\cos\,(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\cos\,(x + y) = \cos\,(x)\cos\,(y) - \text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\cos\,(x - y) = \cos\,(x)\cos\,(y) + \text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Cuidado: na expansão de $\cos\,(x \pm y)$ o sinal é sempre trocado!

O que acontece se expandirmos $\operatorname{sen}(x + \pi/2)$?

O que acontece se expandirmos $\operatorname{sen}(x + \pi/2)$?

$$\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \operatorname{sen}(x)\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(x)$$

Propriedades do seno e do cosseno

O que acontece se expandirmos sen $(x + \pi/2)$?

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(x + \pi/2) &= \text{sen}\,(x)\cos(\pi/2) + \text{sen}\,(\pi/2)\cos(x) \\ &= \text{sen}\,(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x) \end{aligned}$$

Propriedades do seno e do cosseno

O que acontece se expandirmos $\text{sen}\,(x + \pi/2)$?

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,(x + \pi/2) &= \text{sen}\,(x)\cos(\pi/2) + \text{sen}\,(\pi/2)\cos(x) \\
&= \text{sen}\,(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x) \\
\text{sen}\,(x + \pi/2) &= \cos(x)
\end{aligned}$$

O que acontece se expandirmos sen $(x + \pi/2)$?

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+\pi/2) &= \operatorname{sen}(x)\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(x) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x) \\
\operatorname{sen}(x+\pi/2) &= \cos(x)
\end{aligned}$$

Conclusão: o gráfico de cos é o gráfico de sen...

O que acontece se expandirmos $\operatorname{sen}(x + \pi/2)$?

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+\pi/2) &= \operatorname{sen}(x)\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(x) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x) \\
\operatorname{sen}(x+\pi/2) &= \cos(x)
\end{aligned}$$

Conclusão: o gráfico de cos é o gráfico de sen transladado $\pi/2$ unidades para a **esquerda**.

O que acontece se expandirmos $\operatorname{sen}(x + \pi/2)$?

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x + \pi/2) &= \operatorname{sen}(x)\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(x) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x) \\
\operatorname{sen}(x + \pi/2) &= \cos(x)
\end{aligned}$$

Conclusão: o gráfico de cos é o gráfico de sen transladado $\pi/2$ unidades para a **esquerda**.

Equivalentemente: o gráfico de sen é o gráfico de cos transladado $\pi/2$ unidades para a **direita**.

Gráficos das funções seno e cosseno

Gráfico da função seno:

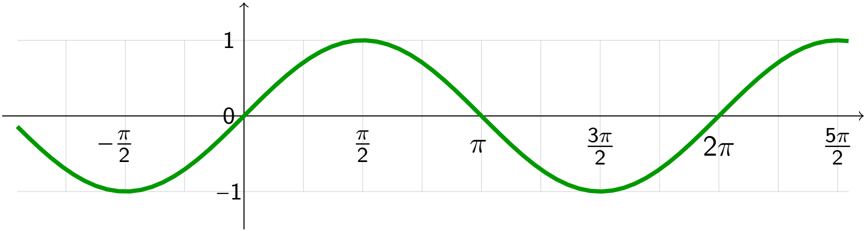


Gráfico da função seno:

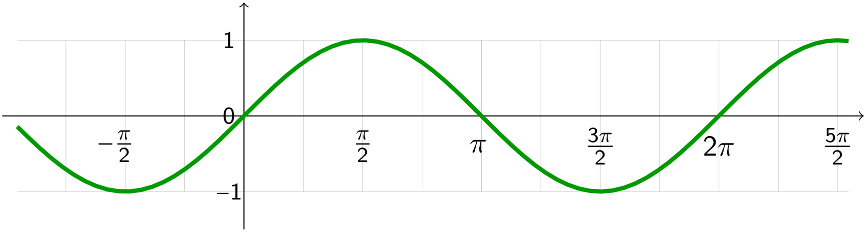
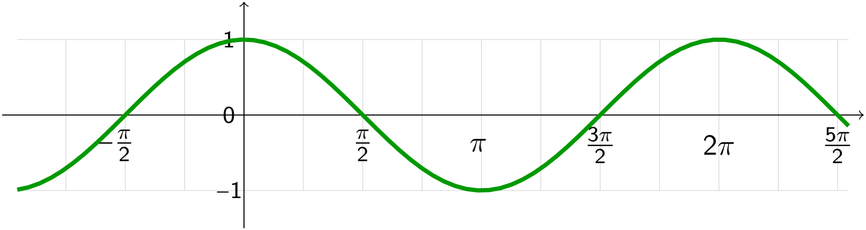


Gráfico da função cosseno:



Em que intervalos elas são crescentes? E decrescentes?

Funções periódicas

Note que os gráficos de sen e de cos se repetem a cada 2π.

Funções periódicas

Note que os gráficos de sen e de cos se repetem a cada 2π.
Isto ocorre pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Funções periódicas

Note que os gráficos de sen e de cos se repetem a cada 2π.
Isto ocorre pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ***periódica*** *se existe um número real $r > 0$ tal que*

$$f(x + r) = f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

Funções periódicas

Note que os gráficos de sen e de cos se repetem a cada 2π. Isto ocorre pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ***periódica*** *se existe um número real $r > 0$ tal que*

$$f(x + r) = f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

Seja $T = \text{mín}\{r > 0 \mid f(x + r) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$. Se f é periódica, o número T é chamado **período** de f.

Note que os gráficos de sen e de cos se repetem a cada 2π.
Isto ocorre pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ***periódica*** *se existe um número real $r > 0$ tal que*

$$f(x + r) = f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

Seja $T = \text{mín}\{r > 0 \mid f(x + r) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$. Se f é periódica, o número T é chamado **período** de f.

Para casa: demonstre que se $a \in \mathbb{R}$ é uma constante real tal que $\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen}(x)$ para todo x real, então a é múltiplo de 2π.

Note que os gráficos de sen e de cos se repetem a cada 2π.
Isto ocorre pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Definição

*Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **periódica** se existe um número real $r > 0$ tal que*

$$f(x + r) = f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

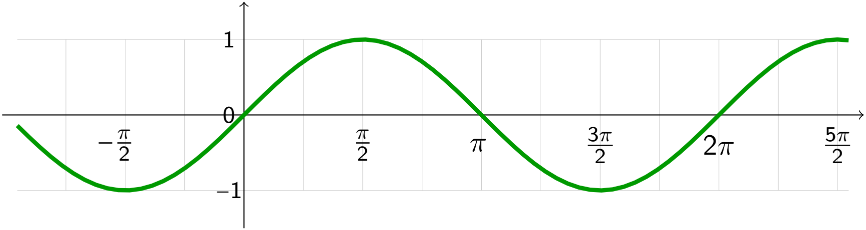
Seja $T = \min\{r > 0 \mid f(x + r) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$. Se f é periódica, o número T é chamado **período** de f.

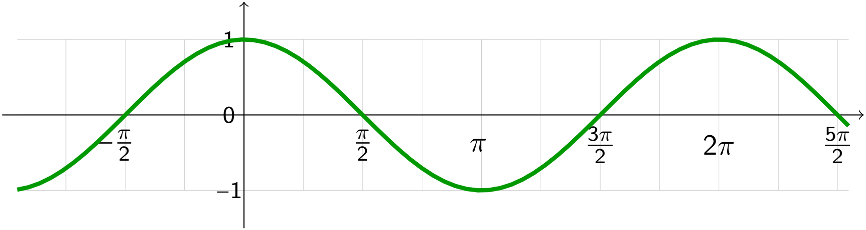
Para casa: demonstre que se $a \in \mathbb{R}$ é uma constante real tal que $\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen}(x)$ para todo x real, então a é múltiplo de 2π.

Como cos é uma translação horizontal de sen, a propriedade acima vale também para cos.

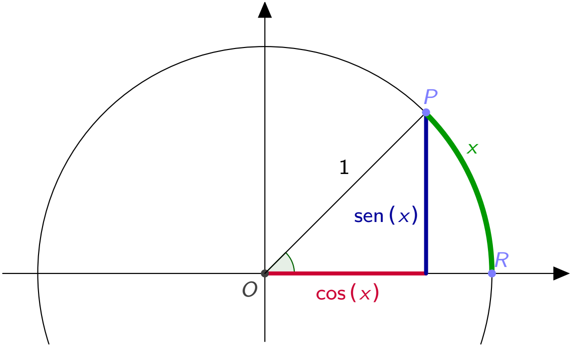
As funções seno e cosseno são periódicas

As funções seno e cosseno tem período 2π.



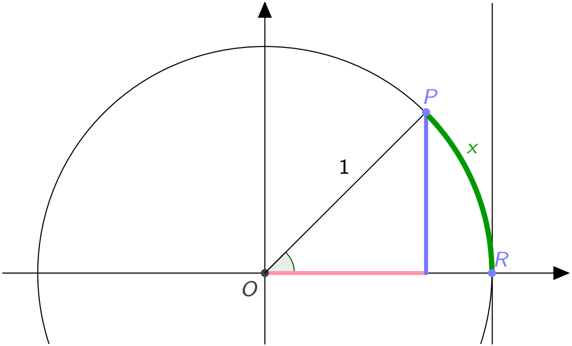


A partir do círculo trigonométrico, definimos também as funções **tangente** e **secante**.



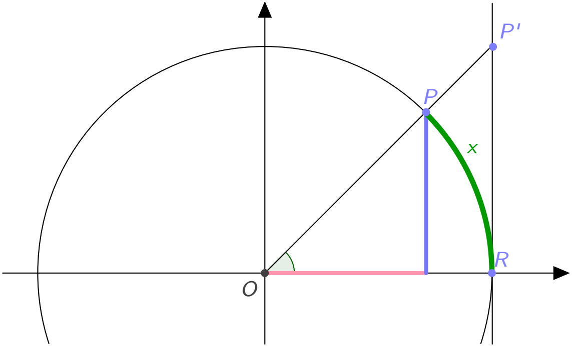
A partir do círculo trigonométrico, definimos também as funções **tangente** e **secante**.

Se P está no 1º ou 4º quadrante, trace a reta tangente ao círculo passando por $R = (1, 0)$.



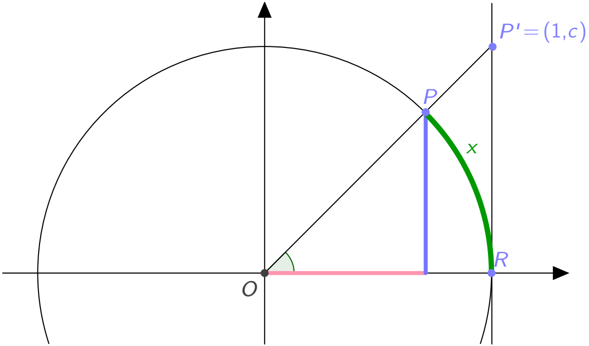
A partir do círculo trigonométrico, definimos também as funções **tangente** e **secante**.

Se P está no 1º ou 4º quadrante, trace a reta tangente ao círculo passando por $R = (1, 0)$. Prolongue o segmento $\overline{OP}$ até encontrar a reta tangente em P'



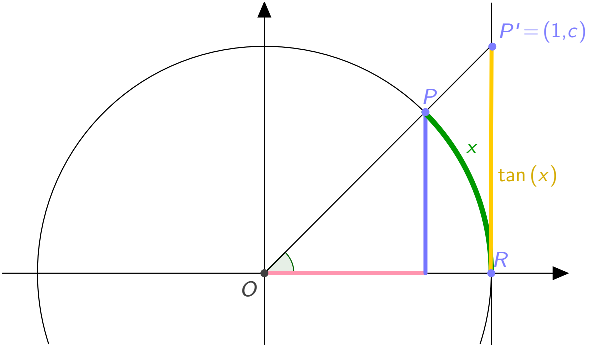
A partir do círculo trigonométrico, definimos também as funções **tangente** e **secante**.

Se P está no 1º ou 4º quadrante, trace a reta tangente ao círculo passando por $R = (1, 0)$. Prolongue o segmento $\overline{OP}$ até encontrar a reta tangente em $P' = (1, c)$.



A partir do círculo trigonométrico, definimos também as funções **tangente** e **secante**.

Se P está no 1º ou 4º quadrante, trace a reta tangente ao círculo passando por $R = (1, 0)$. Prolongue o segmento $\overline{OP}$ até encontrar a reta tangente em $P' = (1, c)$.

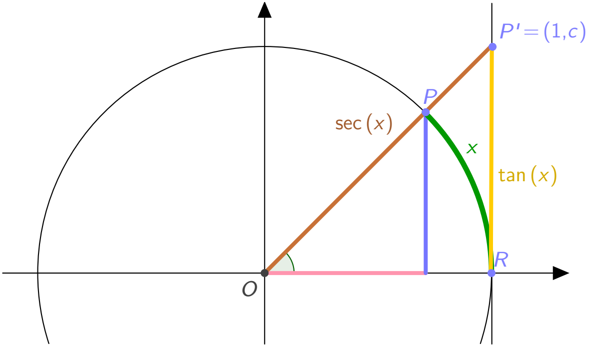


Defina:

$$\tan(x) = c$$

A partir do círculo trigonométrico, definimos também as funções **tangente** e **secante**.

Se P está no 1º ou 4º quadrante, trace a reta tangente ao círculo passando por $R = (1, 0)$. Prolongue o segmento $\overline{OP}$ até encontrar a reta tangente em $P' = (1, c)$.

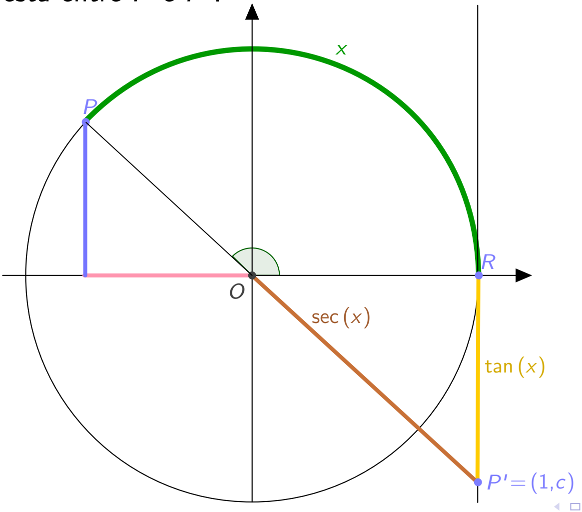


Defina:

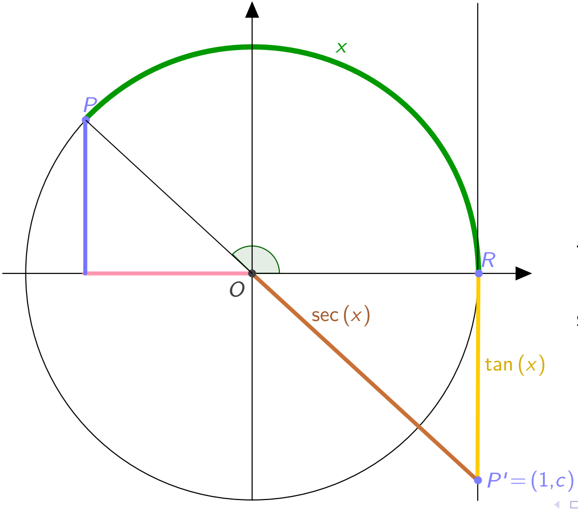
$\tan(x) = c$

$\sec(x) = d(O, P')$

Se P está no 2º ou 3º quadrante, o prolongmento de $\overline{OP}$ inersecta a reta tangente a $R = (1,0)$ em um ponto P' de tal forma que O está entre P e P'.



Se P está no 2º ou 3º quadrante, o prolongmento de $\overline{OP}$ inersecta a reta tangente a $R = (1, 0)$ em um ponto P' de tal forma que O está entre P e P'.

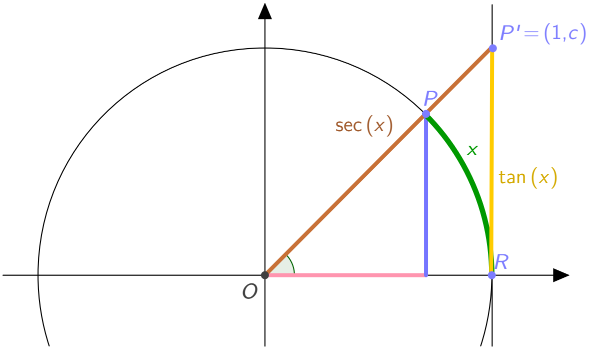


Neste caso, defina:

$\tan(x) = c$

$\sec(x) = -d(O, P')$

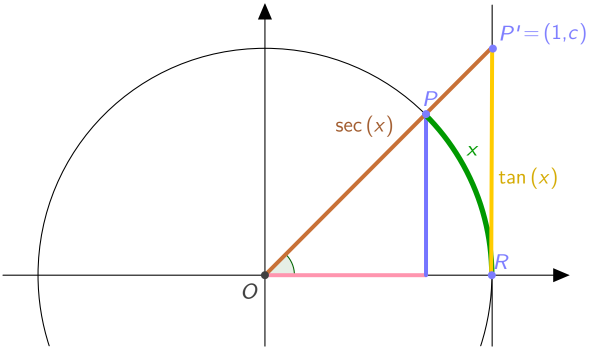
Em quaisquer dos quadrantes que P esteja, podemos obter as seguintes identidades por semelhança de triângulos:



$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad \text{e} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

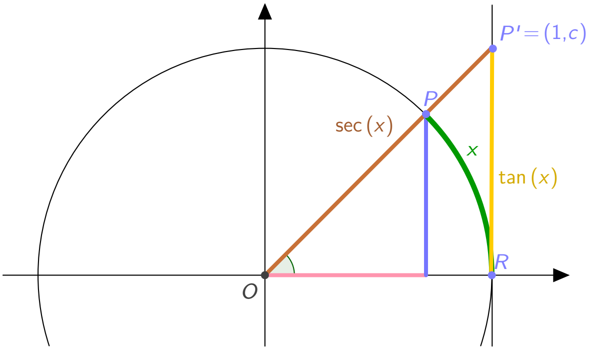
Propriedades das funções tangente e secante

Diretamente da definição, também obtemos:

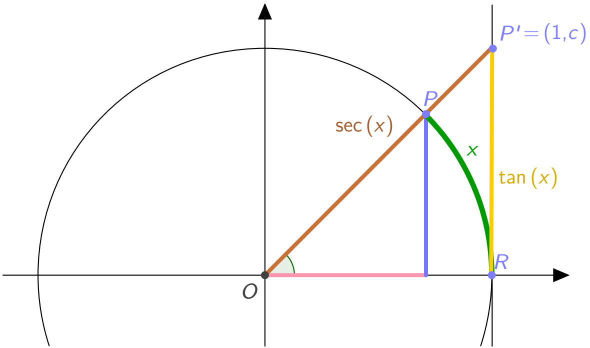


Propriedades das funções tangente e secante

Diretamente da definição, também obtemos:

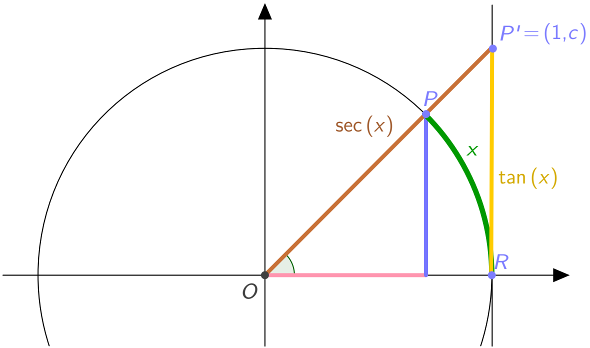


Diretamente da definição, também obtemos:



$$[\tan(x)]^2 + 1 = [\sec(x)]^2$$

Diretamente da definição, também obtemos:



$$[\tan(x)]^2 + 1 = [\sec(x)]^2$$

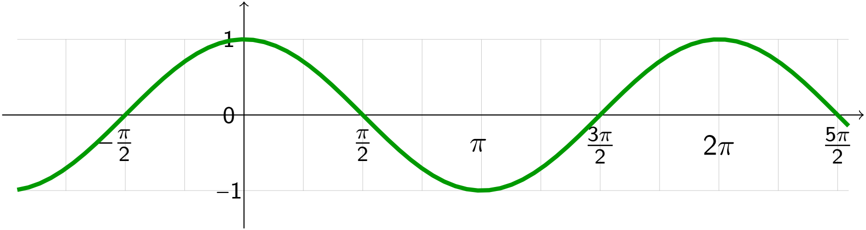
que também é escrito como $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$

Propriedades das funções tangente e secante

Sabemos que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, portanto
Dom sec $= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$

Sabemos que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, portanto
Dom sec $= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$

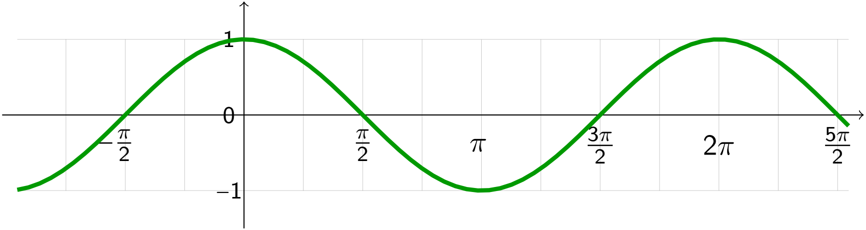
Gráfico de $\cos(x)$:



Propriedades das funções tangente e secante

Sabemos que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, portanto
Dom sec $= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$

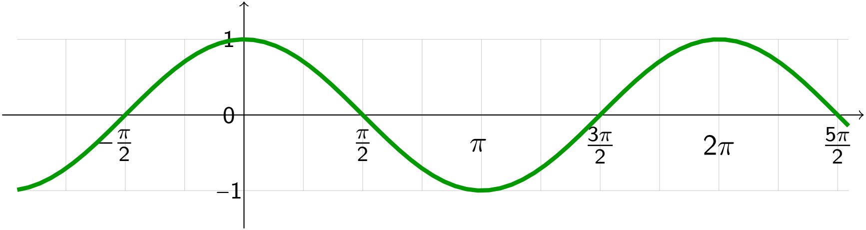
Gráfico de $\cos(x)$:



Logo, Dom sec $= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Sabemos que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, portanto
$\text{Dom} \sec = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$

Gráfico de $\cos(x)$:



Logo, $\text{Dom} \sec = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, então $\text{Dom} \tan = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Para casa: Dadas funções reais f e g, considere as funções F e G tais que $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $G(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Demonstre que:

Para casa: Dadas funções reais f e g, considere as funções F e G tais que $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $G(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Demonstre que: 1) se f, g são ambas pares, então F, G são pares;

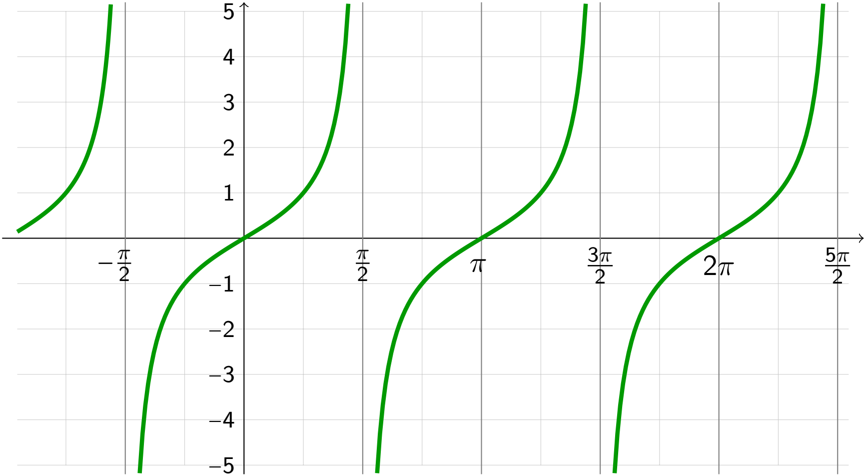
Para casa: Dadas funções reais f e g, considere as funções F e G tais que $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $G(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Demonstre que: 1) se f, g são ambas pares, então F, G são pares;
2) se f, g são ambas ímpares, então F, G são pares;

Para casa: Dadas funções reais f e g, considere as funções F e G tais que $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $G(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Demonstre que: 1) se f, g são ambas pares, então F, G são pares; 2) se f, g são ambas ímpares, então F, G são pares; 3) se f é par e g é ímpar, então F, G são ímpares.

Para casa: Dadas funções reais f e g, considere as funções F e G tais que $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $G(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Demonstre que: 1) se f, g são ambas pares, então F, G são pares; 2) se f, g são ambas ímpares, então F, G são pares; 3) se f é par e g é ímpar, então F, G são ímpares.

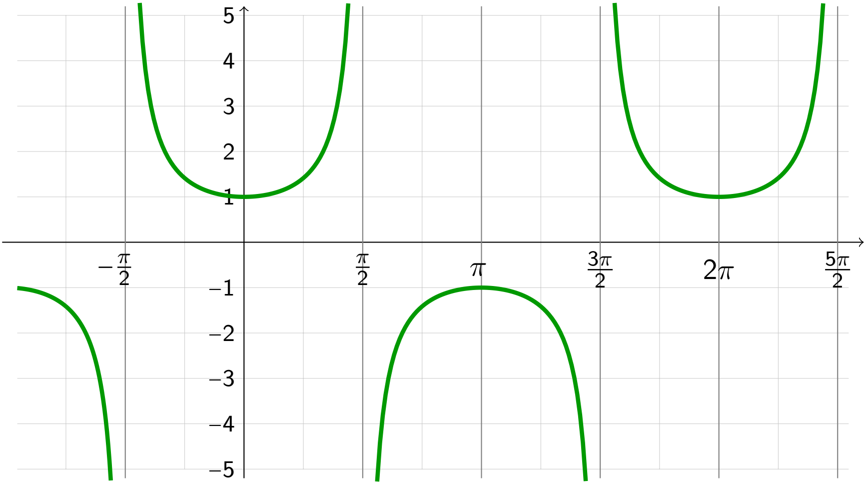
Consequência do resultado acima:
sec é função par e tan é função ímpar.

Gráfico da função tangente



em que intervalos a função tangente é crescente?

Gráfico da função secante



em que intervalos a função secante é crescente? e decrescente?

Funções cotangente e cossecante

Se traçarmos a reta tangente pelo ponto $(0,1)$ e prolongarmos o segmento OP até encontrarmos esta reta num ponto $P' = (d,1)$, podemos definir as grandezas $\cot(x) = d$ e $\csc(x) = d(O,P')$ se P está entre O e P', ou $\csc(x) = -d(O,P')$ se O está entre P e P'.

Para casa: desenhar o círculo trigonométrico neste caso.

Funções cotangente e cossecante

Se traçarmos a reta tangente pelo ponto $(0,1)$ e prolongarmos o segmento OP até encontrarmos esta reta num ponto $P' = (d,1)$, podemos definir as grandezas $\cot(x) = d$ e $\csc(x) = d(O,P')$ se P está entre O e P', ou $\csc(x) = -d(O,P')$ se O está entre P e P'.

Para casa: desenhar o círculo trigonométrico neste caso.

Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \text{e} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Funções cotangente e cossecante

Se traçarmos a reta tangente pelo ponto $(0,1)$ e prolongarmos o segmento OP até encontrarmos esta reta num ponto $P' = (d,1)$, podemos definir as grandezas $\cot(x) = d$ e $\csc(x) = d(O,P')$ se P está entre O e P', ou $\csc(x) = -d(O,P')$ se O está entre P e P'.

Para casa: desenhar o círculo trigonométrico neste caso.

Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \text{e} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Domínio de ambas as funções:

Se traçarmos a reta tangente pelo ponto $(0,1)$ e prolongarmos o segmento OP até encontrarmos esta reta num ponto $P' = (d,1)$, podemos definir as grandezas $\cot(x) = d$ e $\csc(x) = d(O,P')$ se P está entre O e P', ou $\csc(x) = -d(O,P')$ se O está entre P e P'.

Para casa: desenhar o círculo trigonométrico neste caso.

Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \text{e} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Domínio de ambas as funções: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Funções cotangente e cossecante

Se traçarmos a reta tangente pelo ponto $(0,1)$ e prolongarmos o segmento OP até encontrarmos esta reta num ponto $P' = (d,1)$, podemos definir as grandezas $\cot(x) = d$ e $\csc(x) = d(O,P')$ se P está entre O e P', ou $\csc(x) = -d(O,P')$ se O está entre P e P'.

Para casa: desenhar o círculo trigonométrico neste caso.

Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \text{e} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Domínio de ambas as funções: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pela construção, demonstramos que $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$

Funções cotangente e cossecante

Se traçarmos a reta tangente pelo ponto $(0, 1)$ e prolongarmos o segmento OP até encontrarmos esta reta num ponto $P' = (d, 1)$, podemos definir as grandezas $\cot(x) = d$ e $\csc(x) = d(O, P')$ se P está entre O e P', ou $\csc(x) = -d(O, P')$ se O está entre P e P'.

Para casa: desenhar o círculo trigonométrico neste caso.

Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \text{e} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

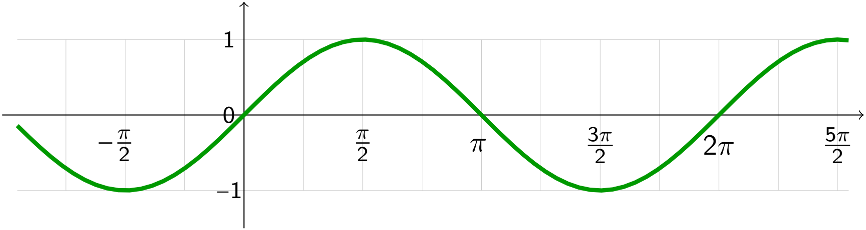
Domínio de ambas as funções: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pela construção, demonstramos que $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$

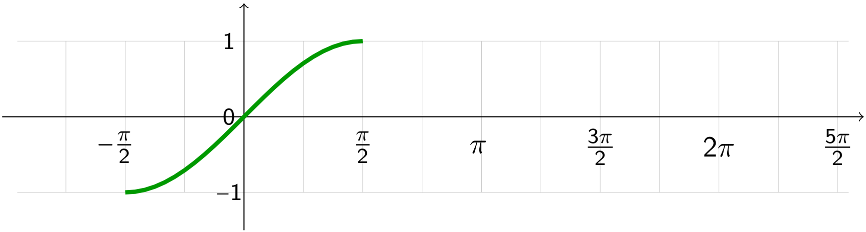
A função cot também é escrita como cotan, cotg.
A função csc também é escrita como cosec.

Mais informações: seção 7.6.3.

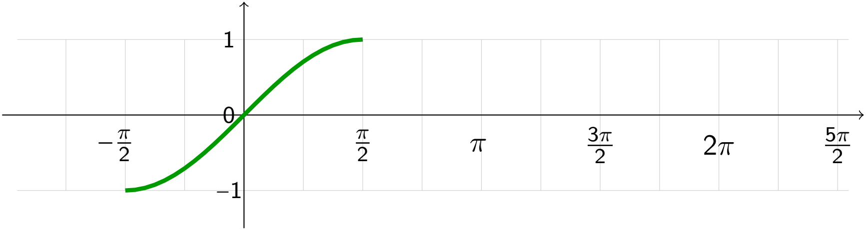
A função $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é injetora nem sobrejetora.



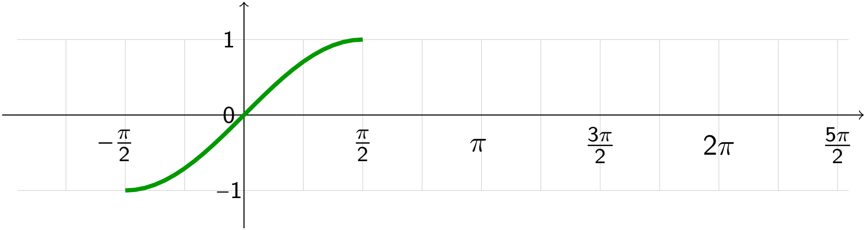
A função $\text{sen} : [-\pi/2; \pi/2] \to \mathbb{R}$ é injetora mas não sobrejetora.



A função $\text{sen} : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ é bijetora!

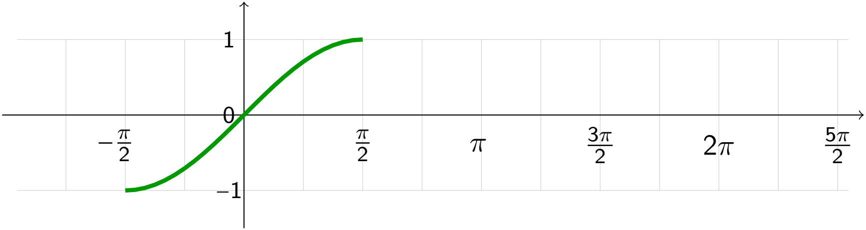


A função $\operatorname{sen} : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ é bijetora!



A função inversa de $\operatorname{sen} : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ é chamada função **arco seno**, e é denotada sen^{-1} ou arcsen

A função $\text{sen} : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ é bijetora!



A função inversa de $\text{sen} : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ é chamada função **arco seno**, e é denotada sen^{-1} ou arcsen

$$\begin{aligned} \text{arcsen} : [-1; 1] &\to [-\pi/2; \pi/2] \\ y &\mapsto \text{arcsen}(y) = x \iff \text{sen}(x) = y \end{aligned}$$

$\text{arcsen} : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$

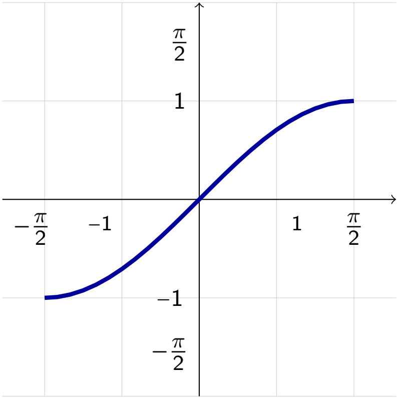


Gráfico da função arco seno

$$\text{arcsen} : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$$

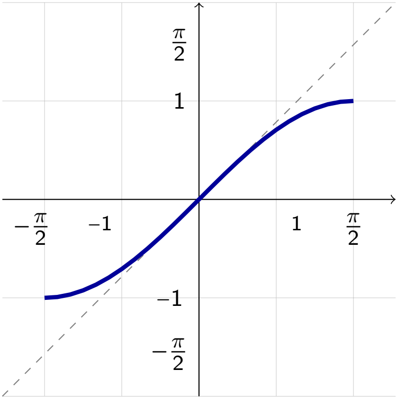


Gráfico da função arco seno

$\text{arcsen} : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$

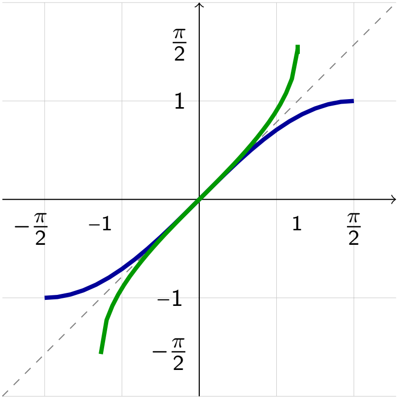
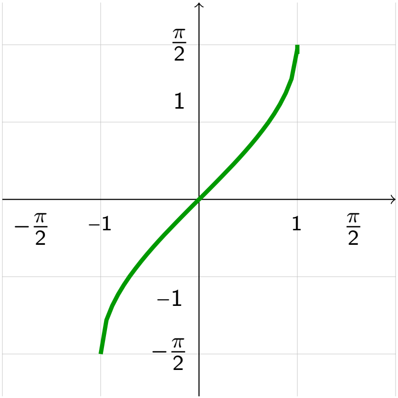


Gráfico da função arco seno

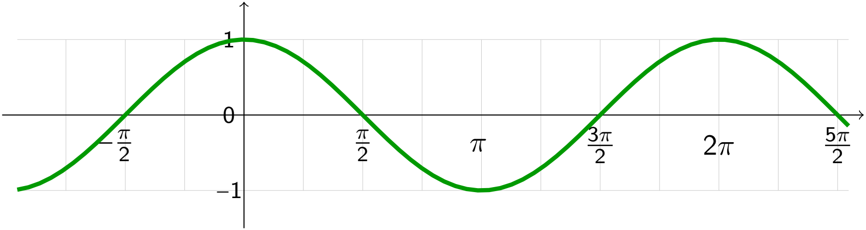
$\text{arcsen} : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$



arcsen é crescente em $[-1; 1]$

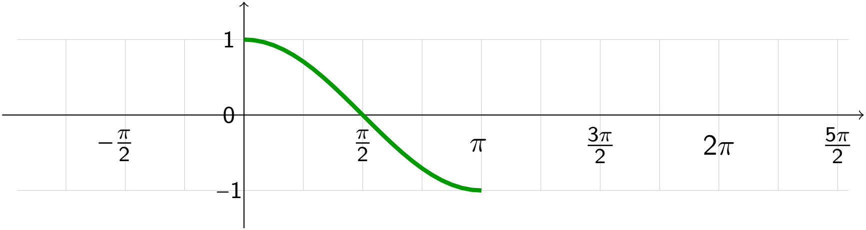
Função arco cosseno

A função $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é injetora nem sobrejetora.



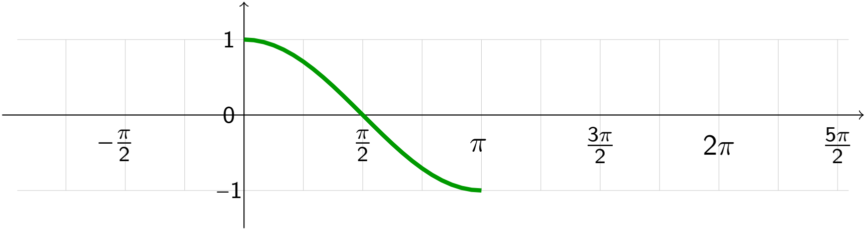
Função arco cosseno

A função $\cos : [0; \pi] \to \mathbb{R}$ é injetora mas não sobrejetora.

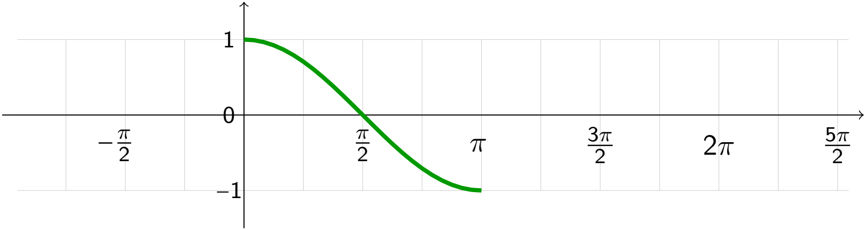


Função arco cosseno

A função $\cos : [0; \pi] \to [-1; 1]$ é bijetora!

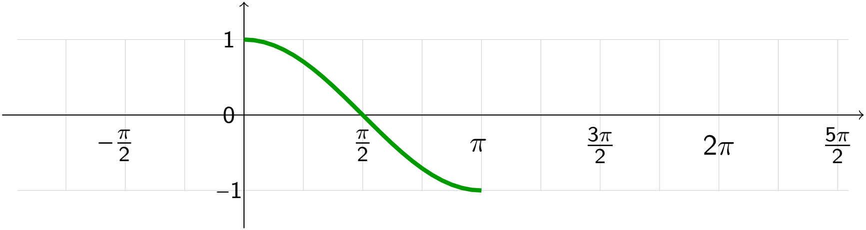


A função $\cos : [0; \pi] \to [-1; 1]$ é bijetora!



A função inversa de $\cos : [0; \pi] \to [-1; 1]$ é chamada função **arco cosseno**, e é denotada $\cos^{-1}$ ou arccos

A função $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ é bijetora!



A função inversa de $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ é chamada função **arco cosseno**, e é denotada $\cos^{-1}$ ou arccos

$$\begin{aligned} \arccos : [-1;1] &\to [0;\pi] \\ y &\mapsto \arccos(y) = x \iff \cos(x) = y \end{aligned}$$

$\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi]$

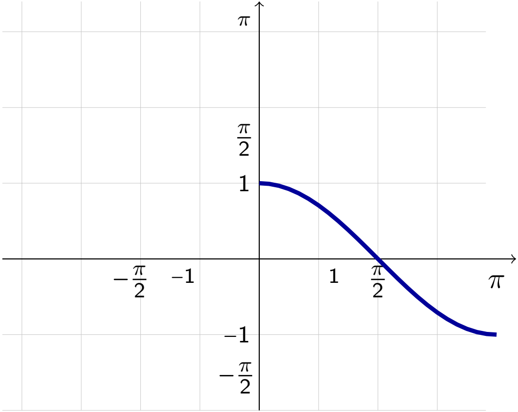


Gráfico da função arco cosseno

$\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$

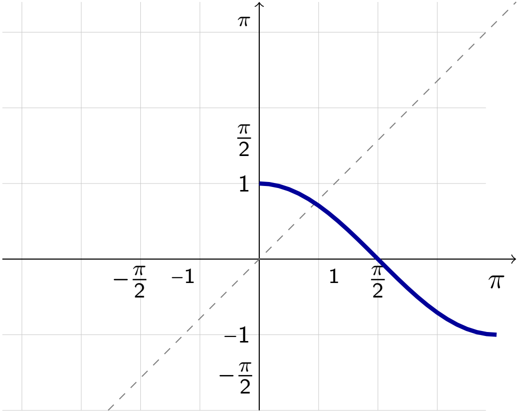


Gráfico da função arco cosseno

$\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi]$

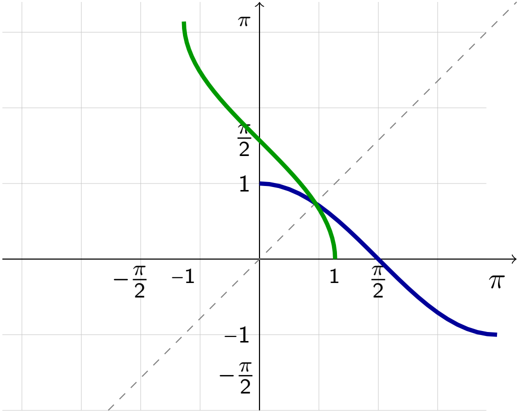
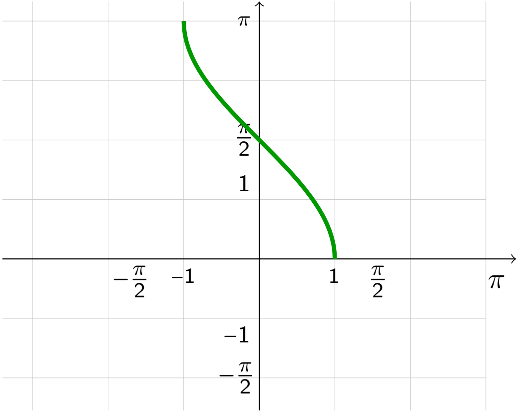


Gráfico da função arco cosseno

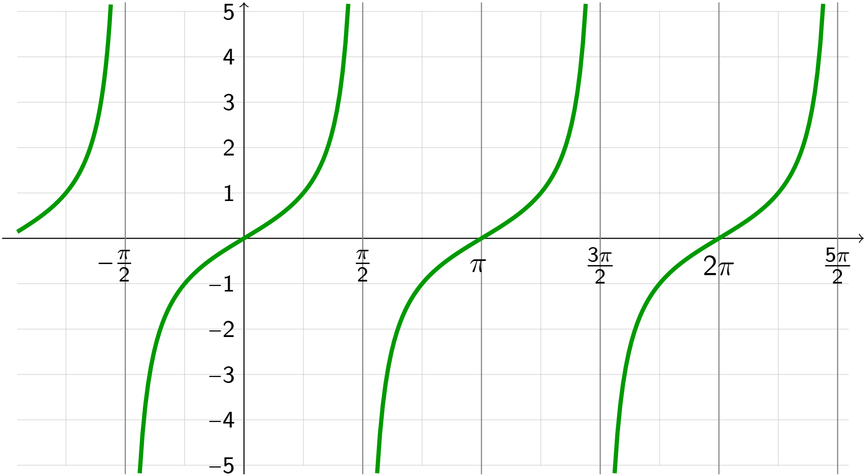
$\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi]$



arccos é decrescente em $[-1; 1]$

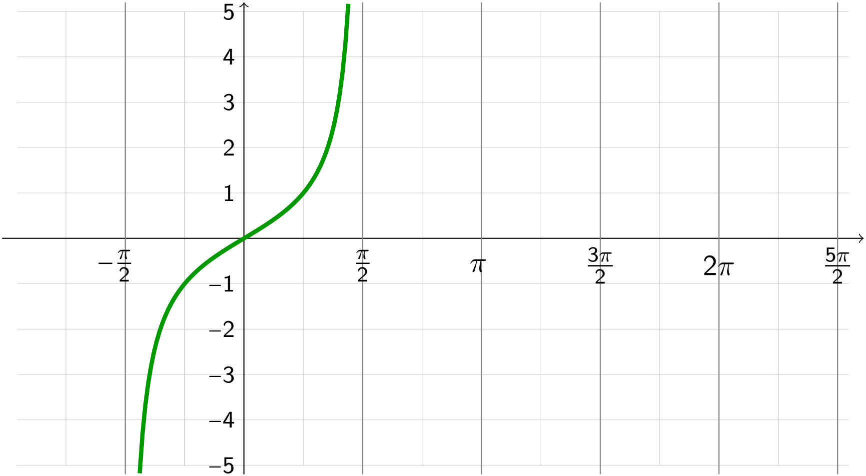
Função arco tangente

$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ não é injetora mas é sobrejetora.



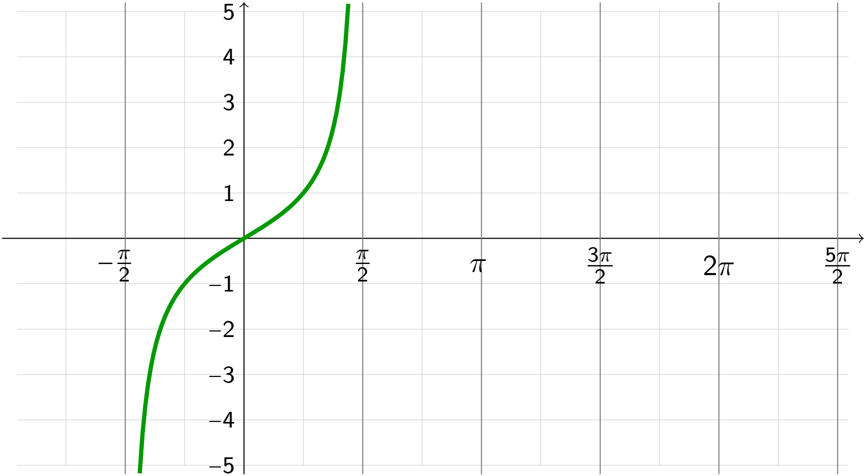
Função arco tangente

$\tan : (-\pi/2; \pi/2) \to \mathbb{R}$ é bijetora!



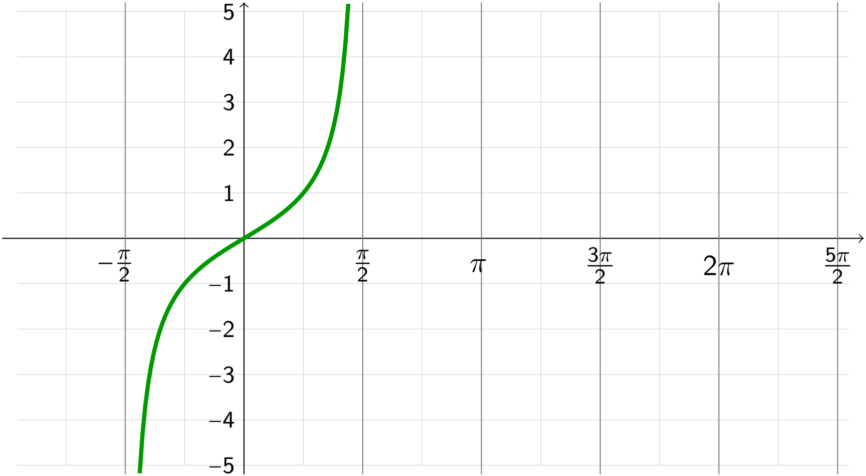
Função arco tangente

$\tan : (-\pi/2; \pi/2) \to \mathbb{R}$ é bijetora!



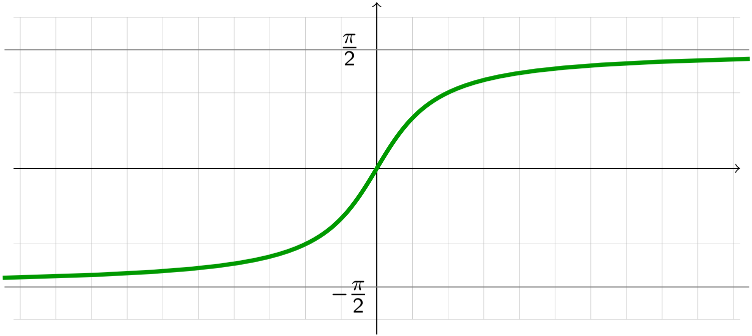
Função arco tangente

$\tan : (-\pi/2; \pi/2) \to \mathbb{R}$ é bijetora!



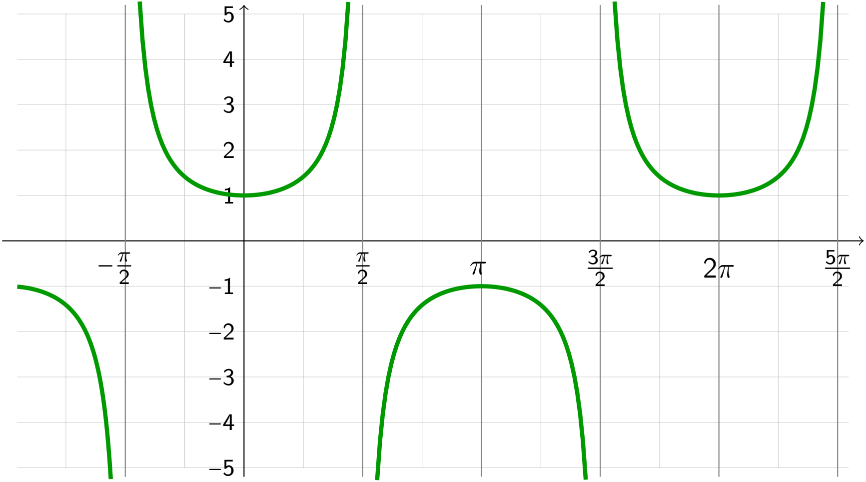
A função inversa de $\tan : (-\pi/2; \pi/2) \to \mathbb{R}$ é chamada função **arco tangente**, e é denotada $\tan^{-1}$, arctan ou arctg.

$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2; \pi/2)$



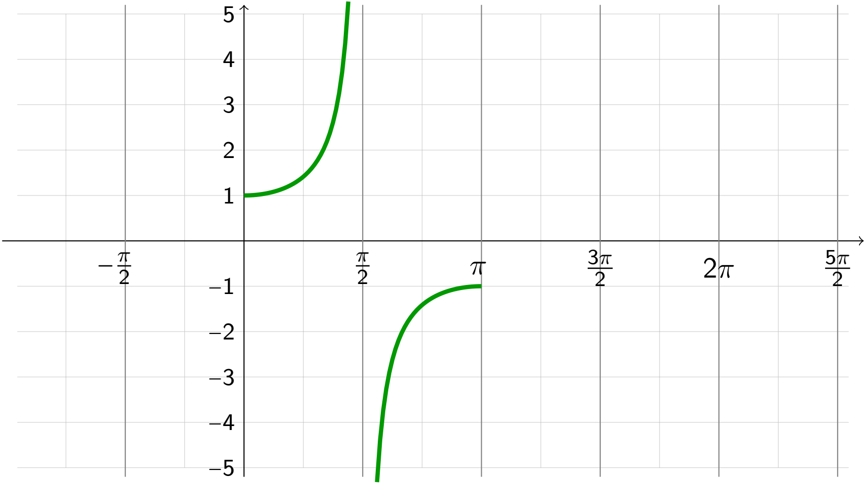
arctan é crescente em $\mathbb{R}$

$\sec : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ não é injetora nem sobrejetora.



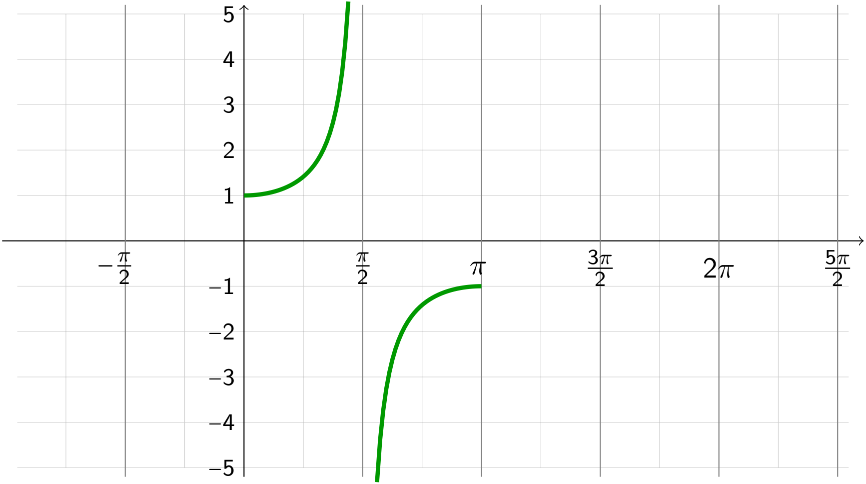
Função arco secante

$\sec : [0; \pi] \setminus \{\pi/2\} \to \mathbb{R}$ é injetora mas não sobrejetora.



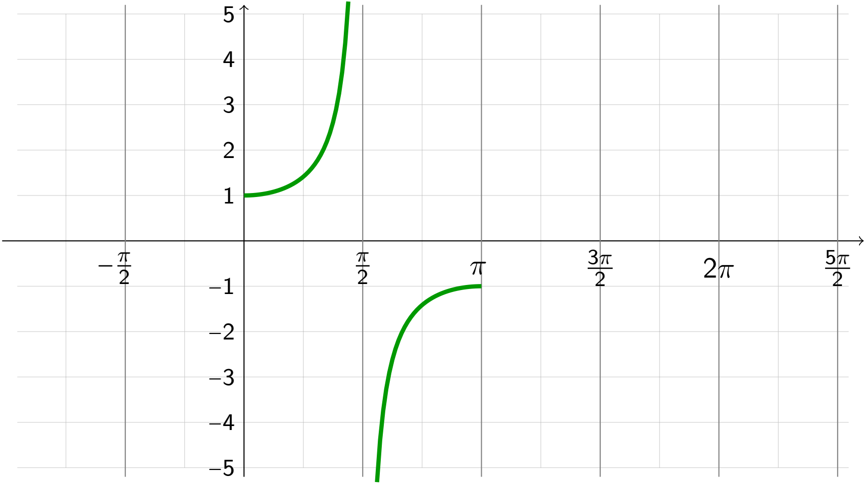
Função arco secante

$\sec : [0;\pi] \setminus \{\pi/2\} \to \mathbb{R} \setminus (-1;1)$ é bijetora!



Função arco secante

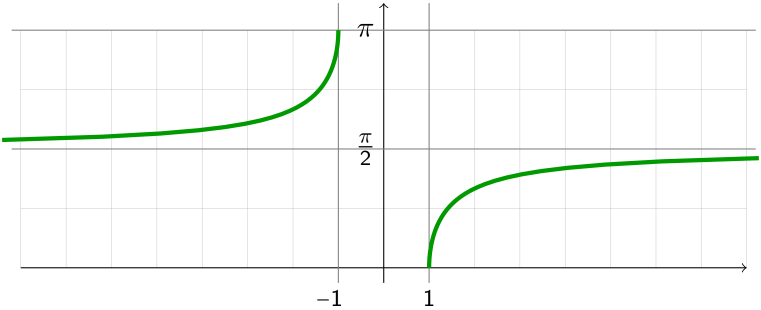
$\sec : [0;\pi] \setminus \{\pi/2\} \to \mathbb{R} \setminus (-1;1)$ é bijetora!



A função inversa de $\sec : [0;\pi/2) \cup (\pi/2;\pi] \to (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ é chamada função **arco secante**, e é denotada $\sec^{-1}$ ou arcsec.

Gráfico da função arco secante

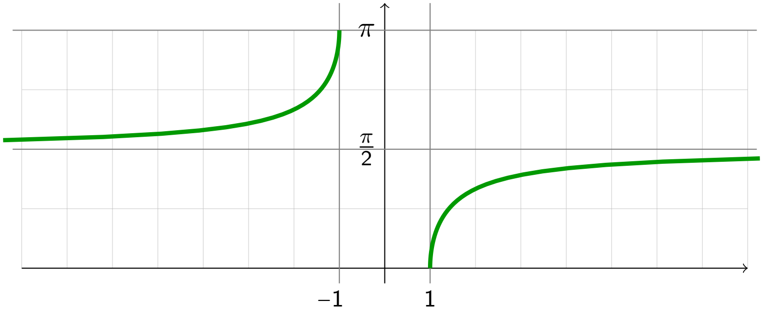
$$\text{arcsec} : (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \to [0; \pi/2) \cup (\pi/2; \pi]$$



arcsec é crescente em $(-\infty; -1]$ e em $[1; +\infty)$

Gráfico da função arco secante

$\text{arcsec} : (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \to [0; \pi/2) \cup (\pi/2; \pi]$



arcsec é crescente em $(-\infty; -1]$ e em $[1; +\infty)$
mas **não** é crescente em $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

A função arco cotangente é a inversa da função tangente, definida para um domínio e contradomínio onde esta é bijetora.

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot}:\mathbb{R} &\rightarrow (0;\pi) \\ y &\mapsto \operatorname{arccot}(y)=x \iff \cot(x)=y \end{aligned}$$

Funções arco cossecante a arco cotangente

A função arco cotangente é a inversa da função tangente, definida para um domínio e contradomínio onde esta é bijetora.

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} : \mathbb{R} &\to (0; \pi) \\ y &\mapsto \operatorname{arccot}(y) = x \iff \cot(x) = y \end{aligned}$$

A função arco cossecante é a inversa da função cossecante, definida para um domínio e contradomínio onde esta é bijetora.

$$\begin{aligned} \operatorname{arccsc} : [-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2] &\to (-\infty; 1] \cup [1; \infty) \\ y &\mapsto \operatorname{arccsc}(y) = x \iff \csc(x) = y \end{aligned}$$

Para casa: demonstre as seguintes propriedades.

- $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

Para casa: demonstre as seguintes propriedades.

- $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\operatorname{arccsc}(x) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$

Funções trigonométricas inversas: algumas propriedades

Para casa: demonstre as seguintes propriedades.

- $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\operatorname{arccsc}(x) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x > 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Funções trigonométricas inversas: algumas propriedades

Para casa: demonstre as seguintes propriedades.

- $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\operatorname{arccsc}(x) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x > 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x < 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Para casa: demonstre as seguintes propriedades.

- $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\operatorname{arccsc}(x) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x > 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x < 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\cos\left(\operatorname{arcsen}(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$

Para casa: demonstre as seguintes propriedades.

- $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\operatorname{arccsc}(x) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x > 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x < 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\cos\left(\operatorname{arcsen}(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\operatorname{sen}\left(\arccos(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$

Para casa: demonstre as seguintes propriedades.

- $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\operatorname{arccsc}(x) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x > 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
- se $x < 0$, então $\operatorname{arccot}(x) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\cos\left(\operatorname{arcsen}(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\operatorname{sen}\left(\arccos(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\sec(\arctan(x)) = \sqrt{1 + x^2}$

Para casa

Para casa: ler com atenção **todo** o capítulo 7 e fazer todos os exercícios.

Matéria da prova 2: equações, inequações e funções.