Limites

Juliana Pimentel

juliana.pimentel@ufabc.edu.br

Bases Matemáticas

Limite - Noção Intuitiva

Vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ para valores de x próximos de um ponto p.

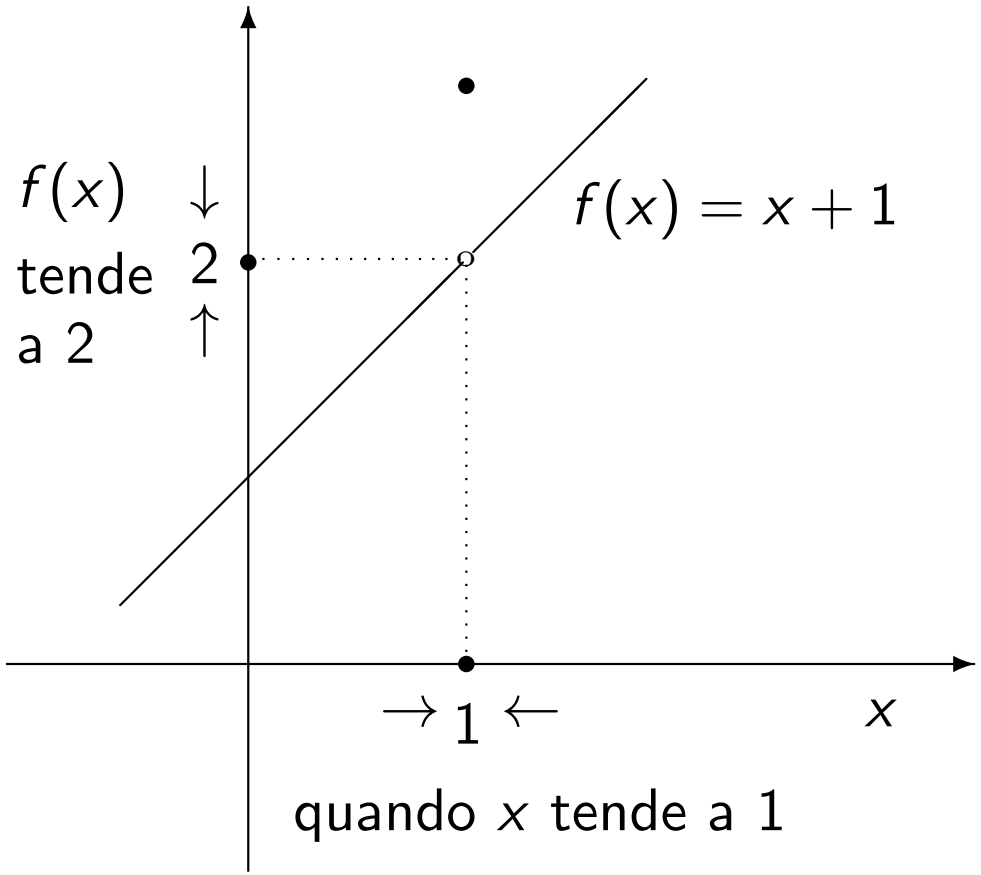
Limite - Noção Intuitiva

Vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ para valores de x próximos de um ponto p. Consideremos, por exemplo, a função $f(x) = x + 1$ para $x \neq 1$ e $f(1) = 3$.

Limite - Noção Intuitiva

Vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ para valores de x próximos de um ponto p. Consideremos, por exemplo, a função $f(x) = x + 1$ para $x \neq 1$ e $f(1) = 3$. Para valores de x próximos de 1, $f(x)$ assume os seguintes valores:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$1,5$	$2,5$	$0,5$	$1,5$
$1,1$	$2,1$	$0,9$	$1,9$
$1,01$	$2,01$	$0,99$	$1,99$
$1,001$	$2,001$	$0,999$	$1,999$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2


$f(x)$
tende
a 2
$\downarrow$
2
$\uparrow$
$f(x) = x + 1$
$\rightarrow 1 \leftarrow$
x
quando x tende a 1

Da tabela vemos que quando x estiver próximo de 1 (de qualquer lado de 1) $f(x)$ estará próximo de 2. De fato, podemos tomar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos tomando x suficientemente próximo de 1.

Da tabela vemos que quando x estiver próximo de 1 (de qualquer lado de 1) $f(x)$ estará próximo de 2. De fato, podemos tomar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos tomando x suficientemente próximo de 1. Expressamos isso dizendo que o *limite da função $f(x)$ quando x tende a 1 é igual a 2.*

Da tabela vemos que quando x estiver próximo de 1 (de qualquer lado de 1) $f(x)$ estará próximo de 2. De fato, podemos tomar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos tomando x suficientemente próximo de 1. Expressamos isso dizendo que o *limite da função $f(x)$ quando x tende a 1 é igual a 2.*

Definição (Intuitiva)

Escrevemos

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

e dizemos **o limite de $f(x)$, quando x tende a p, é igual a L** *se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L para x suficientemente próximo de p, mas distinto de p.*

Observação: Ao procurar o limite quando x tende a p não consideramos $x = p$. Estamos interessados no que acontece próximo de p e a função $f(x)$ nem precisa estar definida para $x = p$. Consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Observe que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ não está definida quando $x = 1$.

Temos que para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1.$$

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Observe que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ não está definida quando $x = 1$.
Temos que para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1.$$

Como os valores das duas funções são iguais para $x \neq 1$, então os seus limites quando x tende a 1 também. Portanto,

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Observe que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ não está definida quando $x = 1$.
Temos que para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1.$$

Como os valores das duas funções são iguais para $x \neq 1$, então os seus limites quando x tende a 1 também. Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Exemplo

Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$ *Determine o limite quando x tende a 1.*

Exemplo

Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$ *Determine o limite quando x tende a 1.*

Observe que para $x \neq 1$ a função $f(x)$ é igual à função do exemplo anterior, logo $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$,

Exemplo

Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$ *Determine o limite quando x tende a 1.*

Observe que para $x \neq 1$ a função $f(x)$ é igual à função do exemplo anterior, logo $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, o qual não é o valor da função para $x = 1$. Ou seja, o gráfico desta função apresenta uma quebra em $x = 1$ (neste caso dizemos que *a função não é contínua).*

Definições

Vamos ver a definição precisa de limite. Consideremos a seguinte função

Definições

Vamos ver a definição precisa de limite. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x \neq 3 \\ 6 & se\ x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Definições

Vamos ver a definição precisa de limite. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x \neq 3 \\ 6 & se\ x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$. Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos do que 0,1?

Definições

Vamos ver a definição precisa de limite. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x \neq 3 \\ 6 & se\ x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$. Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos do que 0,1?
A distância de x a 3 é $|x - 3|$ e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo nosso problema é

Definições

Vamos ver a definição precisa de limite. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x \neq 3 \\ 6 & se\ x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$. Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos do que 0,1?
A distância de x a 3 é $|x - 3|$ e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo nosso problema é achar um número δ tal que

$$\text{se} \qquad |x - 3| < \delta, \quad \text{mas} \quad x \neq 3 \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - 5| < 0,1.$$

Se $|x-3| > 0$ então $x \neq 3$. Logo uma formulação equivalente é achar um número δ tal que

Se $|x-3| > 0$ então $x \neq 3$. Logo uma formulação equivalente é achar um número δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x-3| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - 5| < 0,1.$$

Se $|x-3| > 0$ então $x \neq 3$. Logo uma formulação equivalente é achar um número δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x-3| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-5| < 0,1.$$

Note que se $0 < |x-3| < \dfrac{0,1}{2}$, então

$$|f(x)-5| = |(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < 0,1.$$

Se $|x-3| > 0$ então $x \neq 3$. Logo uma formulação equivalente é achar um número δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x-3| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-5| < 0,1.$$

Note que se $0 < |x-3| < \dfrac{0,1}{2}$, então

$$|f(x)-5| = |(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < 0,1.$$

Assim a resposta será $\delta = \dfrac{0,1}{2} = 0,05$.

Se mudarmos o número 0,1 no problema para um número menor 0,01, então o valor de δ mudará para $\delta = \dfrac{0,01}{2}$.

Se mudarmos o número 0,1 no problema para um número menor 0,01, então o valor de δ mudará para $\delta = \dfrac{0,01}{2}$.Em geral, se usarmos um valor positivo arbitrário ε, então o problema será achar um δ tal que

Se mudarmos o número 0,1 no problema para um número menor 0,01, então o valor de δ mudará para $\delta = \dfrac{0,01}{2}$.Em geral, se usarmos um valor positivo arbitrário ε, então o problema será achar um δ tal que

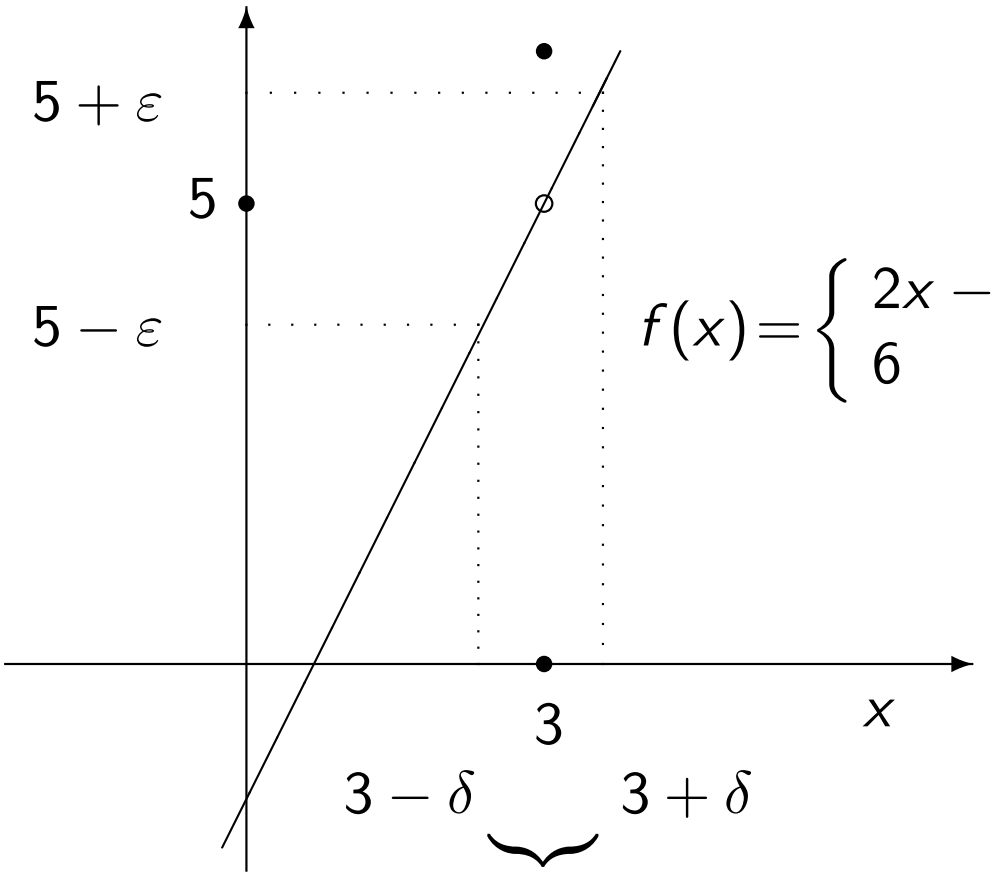
$$\text{se} \qquad 0 < |x-3| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-5| < \varepsilon.$$

Se mudarmos o número 0,1 no problema para um número menor 0,01, então o valor de δ mudará para $\delta = \dfrac{0,01}{2}$.Em geral, se usarmos um valor positivo arbitrário ε, então o problema será achar um δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x-3| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-5| < \varepsilon.$$

E podemos ver que, neste caso, δ pode ser escolhido como sendo $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$f(x)$ está aqui $\left\{ \begin{array}{l} 5+\varepsilon \\ \\ 5-\varepsilon \end{array} \right.$



$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & se\ x \neq 3 \\ 6 & se\ x = 3. \end{cases}$$

se x está aqui e $x \neq 3$

Definição (Limite)

Seja f uma função definida em um intervalo contendo p, exceto possivelmente em p. Diremos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende** p **é** L *e escrevemos*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

se,

Definição (Limite)

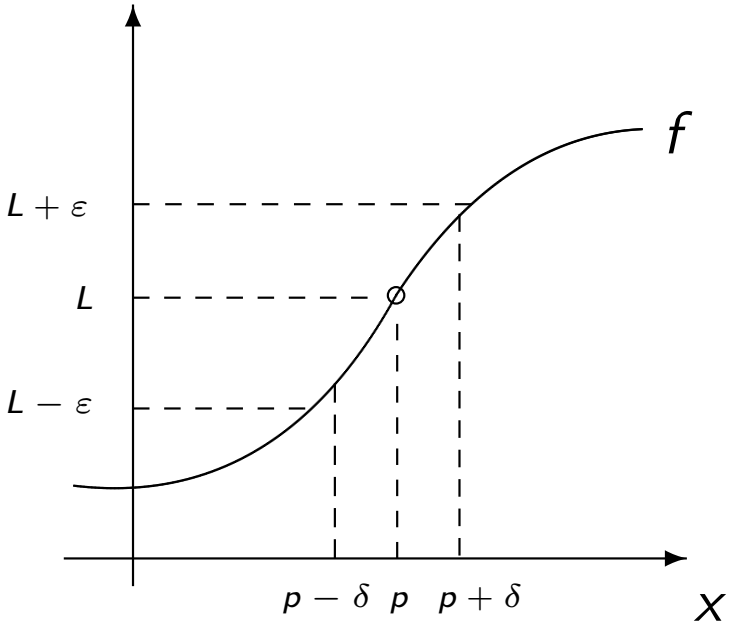
Seja f uma função definida em um intervalo contendo p, exceto possivelmente em p. Diremos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende** p **é** L *e escrevemos*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

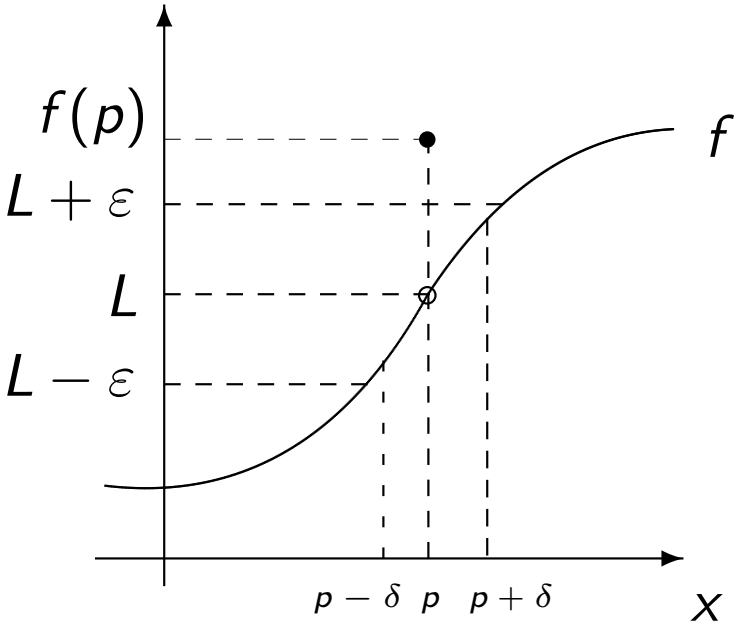
se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta, \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon \ .$$

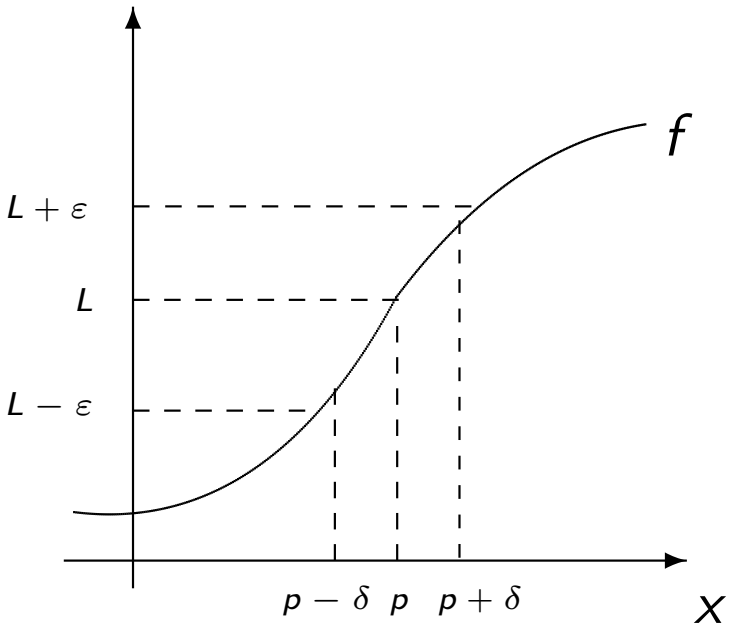
Interpretação geométrica do limite.



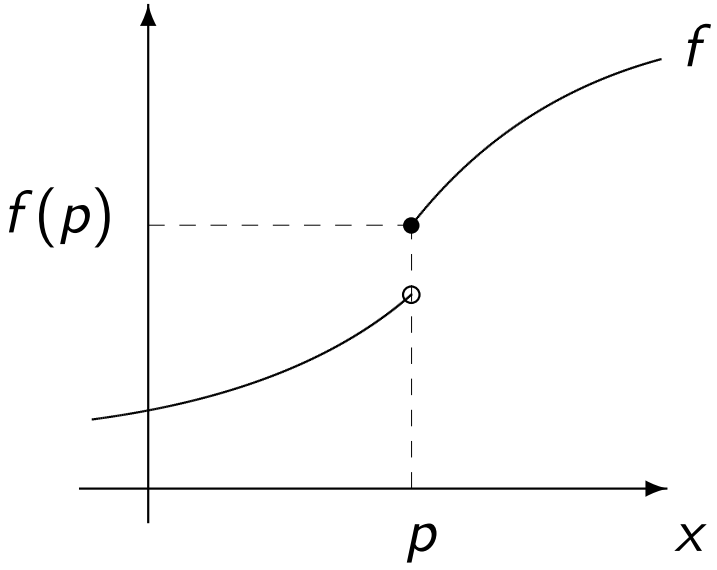
$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L \neq f(p)$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p)$$



Não existe o limite de f em p

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |(3x - 2) - 4| < \varepsilon.$$

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |(3x - 2) - 4| < \varepsilon.$$

Mas $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$. Portanto, queremos

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |(3x - 2) - 4| < \varepsilon.$$

Mas $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$. Portanto, queremos

$$3|x - 2| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |(3x - 2) - 4| < \varepsilon.$$

Mas $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$. Portanto, queremos

$$3|x - 2| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Isto sugere que podemos escolher $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Provemos que a escolha de δ funciona.

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

$$|(3x - 2) - 4| =$$

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

$$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| =$$

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

$$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3(x - 2)| =$$

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, então

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2| < 3\delta =$$

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, então

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} =$$

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, então

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim,

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, então

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim,

$$|(3x-2)-4| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x-2| < \delta$$

logo, pela definição,

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, então

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim,

$$|(3x-2)-4| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x-2| < \delta$$

logo, pela definição, $\lim\limits_{x \to 2}(3x-2) = 4$.

Teorema

Se Seja f uma função definida em um intervalo contendo p, exceto possivelmente em p.

Teorema

Se Seja f uma função definida em um intervalo contendo p, exceto possivelmente em p.O limite

$$\lim_{x \to p} f(x) = L,$$

caso exista, é único.

Limites Laterais

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo p, exceto possivelmente em p. O **limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** p **pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \to p^+} f(x) \qquad \left(\lim_{x \to p^-} f(x) \right)$$

se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$p < x < p + \delta, \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$(p - \delta < x < p, \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon \ ).$$

Critério negativo para existência de limites

Teorema

Seja f uma função definida em um intervalo contendo p, exceto possivelmente em p. Então

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x).$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to R$ *a função definida por*

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \ x \neq 0.$$

Mostre que não existe o limite $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Para casa

Ler páginas 243-260 e fazer os exercícios 1-5 da Lista 9.