Limite - Propriedades Adicionais

Juliana Pimentel

juliana.pimentel@ufabc.edu.br

Bases Matemáticas

Propriedades Adicionais do Limite

Os próximos três teoremas são propriedades adicionais de limites.

Teorema (Teste da Comparação)

Se $p \in D_f \cap D_g$ *e* $f(x) \leq g(x)$ *sempre que* $x \in (D_f \cap D_g) \backslash \{p\}$ *e* x *está próximo de* p *e os limites de* f *e* g *quando* x *tende a* p *existem, então*

Propriedades Adicionais do Limite

Os próximos três teoremas são propriedades adicionais de limites.

Teorema (Teste da Comparação)

Se $p \in D_f \cap D_g$ *e* $f(x) \leq g(x)$ *sempre que* $x \in (D_f \cap D_g) \backslash \{p\}$ *e* x *está próximo de* p *e os limites de* f *e* g *quando* x *tende a* p *existem, então*

$$L_f = \lim_{x \to p} f(x) \leq \lim_{x \to p} g(x) = L_g.$$

Propriedades Adicionais do Limite

Os próximos três teoremas são propriedades adicionais de limites.

Teorema (Teste da Comparação)

Se $p \in D_f \cap D_g$ e $f(x) \leq g(x)$ sempre que $x \in (D_f \cap D_g) \backslash \{p\}$ e x está próximo de p e os limites de f e g quando x tende a p existem, então

$$L_f = \lim_{x \to p} f(x) \leq \lim_{x \to p} g(x) = L_g.$$

De fato: Dado $\epsilon > 0$, para $p \neq x \in D_f \cap D_g$ próximo de p

$$L_f - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq L_g + \epsilon$$

e consequentemente $L_f \leq L_g$.

Teorema (do Confronto)

Sejam f, g, h *funções,* $p \in D = D_f \cap D_g \cap D_h$ *e suponha que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \textit{para } x \textit{ próximo de } p.$$

Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

Teorema (do Confronto)

Sejam f, g, h funções, $p \in D = D_f \cap D_g \cap D_h$ e suponha que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \textit{para } x \textit{ próximo de } p.$$

Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L \ .$$

Teorema (do Confronto)

Sejam f, g, h funções, $p \in D = D_f \cap D_g \cap D_h$ e suponha que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \textit{para } x \textit{ próximo de } p.$$

Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L \ .$$

De fato: Dado $\epsilon > 0$, para $p \neq x \in D_f \cap D_g \cap D_h$ próximo de p

$$L - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \epsilon$$

e o resultado segue.

Exemplo

As funções trigonométricas são contínuas.

Exemplo

As funções trigonométricas são contínuas.

Prova:

Exemplo

As funções trigonométricas são contínuas.

Prova: Para qualquer p, temos que

$$\begin{aligned}|\mathrm{sen}x - \mathrm{sen}p| &= \left|2\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\cos\left(\frac{x+p}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-p}{2}\right| = |x-p|.\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to p}(x-p) = 0$, pelo Teorema do Confronto temos que $\lim\limits_{x\to p} \mathrm{sen}x - \mathrm{sen}p = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to p} \mathrm{sen}x = \mathrm{sen}p$. Logo a função seno é contínua para todo p.

A prova da continuidade do cosseno é feita de maneira similar utilizando a igualdade $\cos x - \cos p = -2\mathrm{sen}\left(\frac{x+p}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)$. A continuidade das outras funções trigonométricas seguem das propriedades do limite. $\square$

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$, multiplicando por x^2 temos

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$, multiplicando por x^2 temos $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$. Sabemos que

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$, multiplicando por x^2 temos $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$. Sabemos que $\lim_{x \to 0} -x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$. Então, pelo Teorema do Confronto,

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$, multiplicando por x^2 temos $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$. Sabemos que $\lim_{x \to 0} -x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$. Então, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| \leq x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(a) *Calcule, caso exista,* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

(b) *Verifique se* f *é contínua em* 0 .

Segue do Teorema do Confronto a seguinte propriedade:

Segue do Teorema do Confronto a seguinte propriedade:

Corolário

Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ *e existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|g(x)| \leq M$ *para* x *próximo de* p*. Então*

Segue do Teorema do Confronto a seguinte propriedade:

Corolário

Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ *e existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|g(x)| \leq M$ *para* x *próximo de* p*. Então*

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0\,.$$

Segue do Teorema do Confronto a seguinte propriedade:

Corolário

Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ *e existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|g(x)| \leq M$ *para* x *próximo de* p*. Então*

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0\,.$$

Exercício: Prove que $\lim_{x \to p} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to p} |f(x)| = 0$.

Segue do Teorema do Confronto a seguinte propriedade:

Corolário

Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ *e existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|g(x)| \leq M$ *para* x *próximo de* p*. Então*

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0\,.$$

Exercício: Prove que $\lim_{x \to p} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to p} |f(x)| = 0$.Prove que $\lim_{x \to p} f(x) = L \implies \lim_{x \to p} |f(x)| = |L|$ e que não vale a volta.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0} x^2 g(x)$, *onde* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$g(x) = \begin{cases} 1 \ , \ x \notin \mathbb{Q} \\ 0 \ , \ x \in \mathbb{Q} \, . \end{cases}$$

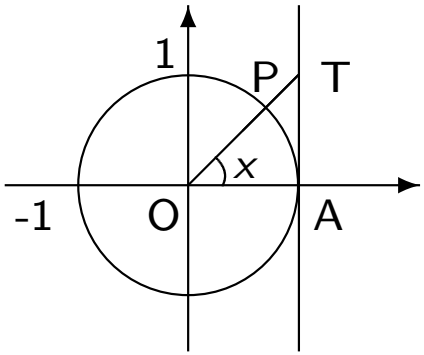
Exercício: Calcule

$$(a) \ \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}; \qquad\qquad (b) \ \lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2}.$$

Exemplo (O Primeiro Limite Fundamental)

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$$

Prova: Note que que para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ vale a desigualdade $0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$.



$$A(\triangle OPA) < A(setorOPA) < A(\triangle OTA)$$

Dividindo por $\operatorname{sen} x$ obtemos $1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$ e conseqentemente $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, pois $\cos x > 0$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Por outro lado, se $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, aplicando a desigualdade a $-x$, obtemos $\cos(-x) < \dfrac{\operatorname{sen}\,(-x)}{-x} < 1$. Daí

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen}\,x}{x} < 1, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\,x}{x} = 1$. $\square$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\,x}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Teorema (Limite da composta)

Sejam f e g duas funções tais que $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ e $L \in D_f$. Se f for contínua em L onde $\lim_{x \to p} g(x) = L$, então

$$\lim_{x \to p} f(g(x)) = f\big(\lim_{x \to p} g(x)\big) = f(L).$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sen} 5x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen} 5x}{x} = 5 \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}\ 5x}{5x} \overset{u=5x}{=} 5 \lim_{u \to 0} \frac{\mathrm{sen}\ u}{u} = 5.$$

Composta de contínuas é contínua

Seja $g : A \to B$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a

Composta de contínuas é contínua

Seja $g : A \to B$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a e seja $f : B \to C$ uma função definida em um intervalo aberto contendo $g(a)$.

Composta de contínuas é contínua

Seja $g : A \to B$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a e seja $f : B \to C$ uma função definida em um intervalo aberto contendo $g(a)$.Se g é contínua em a e f contínua em $g(a)$ então

Composta de contínuas é contínua

Seja $g : A \to B$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a e seja $f : B \to C$ uma função definida em um intervalo aberto contendo $g(a)$.Se g é contínua em a e f contínua em $g(a)$ então

$$f(g(x)) \text{ é contínua em } a.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x} =$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} =$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2} \frac{(1+\cos x)}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2}.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2} \frac{(1+\cos x)}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercício: Calcule

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}.$$