Propriedades das Funções Contínuas

Juliana Pimentel

juliana.pimentel@ufabc.edu.br

Bases Matemáticas

Propriedades das Funções Contínuas

Seguem das propriedades do limite, as seguintes propriedades das funções contínuas. Sejam f e g funções contínuas em p e $k =$ constante. Então:

- $f + g$ é contínua em p.
- kf é contínua em p.
- $f \cdot g$ é contínua em p.
- $\frac{f}{g}$ é contínua em p, se $g(p) \neq 0$.
- Se f é contínua e $f(p) > d$ $(f(p) < d)$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > d$ $(f(x) < d)$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$.
- Se g for contínua em $f(p)$ e f for contínua em p, então $h = g \circ f$ será contínua em p.

Exemplo

$f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, é uma função contínua.

Exemplo

Toda função polinomial é contínua, pois é soma de funções contínuas.

Exemplo

Toda função racional é contínua em qualquer ponto p de seu domínio, pois uma função racional é quociente de duas funções polinomiais.

Corolário

As funções $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *têm imagem* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ *se* n *é ímpar e* $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$ *se* n *é par. Além disso* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é bijetora se* n *é ímpar e* $f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é bijetora qualquer que seja* n.

Exercício

Defina as raízes n-ésimas.

Corolário

A função inversa de uma função contínua é contínua.

Seja n é um inteiro positivo, então

- $\lim_{x \to p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}$, se n for par supomos que $p > 0$.
- $\lim_{x \to p} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to p} f(x)}$, se n for par supomos que $\lim_{x \to p} f(x) > 0$.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$, $[R : 1/2\sqrt{3}]$.

Exemplo

Calcule $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$, $[R : 1/6]$.

Exemplo

Calcule

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}\,[R:\sqrt{2}];$$

$$(b)\ \lim_{x\to 1}\frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1}\,[R:-32].$$

Exemplo

$h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ é contínua pois $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x^2$ que são funções contínuas.

Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário nos diz que o gráfico de uma função contínua assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, ou dito de outra forma, dado

$$d \text{ entre } f(a) \text{ e } f(b),$$

o gráfico de f(x) deve interceptar a reta horizontal y = d.

Teorema (Teorema do Valor Intermediário)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua tal que* $f(a) \neq f(b)$ *, então para qualquer* d *entre* $f(a)$ *e* $f(b)$ *existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = d$*.*

Veremos algumas aplicações do Teorema do Valor Intermediário na demonstração de existência de soluções para equações. Para isso, enunciaremos o Teorema do Valor Intermediário em uma forma especial e mais restrita: o Teorema de Bolzano.

Teorema (Teorema de Bolzano ou Teorema do Anulamento)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$.

Teorema (Teorema de Bolzano ou Teorema do Anulamento)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ assumirem sinais contrários,

Teorema (Teorema de Bolzano ou Teorema do Anulamento)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ assumirem sinais contrários,então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Exemplo

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ *tem pelo menos uma solução no intervalo* $[0, \pi]$.

Exemplo

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ *tem pelo menos uma solução no intervalo* $[0, \pi]$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente

$$\cos(x) - x = 0.$$

Exemplo

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ *tem pelo menos uma solução no intervalo* $[0, \pi]$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente

$$\cos(x) - x = 0.$$

Assim começaremos considerando a função $g(x) = \cos(x) - x$, que é contínua pois é soma de funções contínuas.

Exemplo

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ *tem pelo menos uma solução no intervalo* $[0, \pi]$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente

$$\cos(x) - x = 0.$$

Assim começaremos considerando a função $g(x) = \cos(x) - x$, que é contínua pois é soma de funções contínuas.Agora observamos que

$$g(0) = \cos(0) - 0 = 1,$$

e logo $g(0) > 0$ e

Exemplo

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ *tem pelo menos uma solução no intervalo* $[0, \pi]$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente

$$\cos(x) - x = 0.$$

Assim começaremos considerando a função $g(x) = \cos(x) - x$, que é contínua pois é soma de funções contínuas.Agora observamos que

$$g(0) = \cos(0) - 0 = 1,$$

e logo $g(0) > 0$ eque

$$g(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi,$$

e logo $g(\pi) < 0$.

Exemplo

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ *tem pelo menos uma solução no intervalo* $[0, \pi]$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente

$$\cos(x) - x = 0.$$

Assim começaremos considerando a função $g(x) = \cos(x) - x$, que é contínua pois é soma de funções contínuas.Agora observamos que

$$g(0) = \cos(0) - 0 = 1,$$

e logo $g(0) > 0$ eque

$$g(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi,$$

e logo $g(\pi) < 0$.Logo pelo Teorema de Bolzano existe $c \in (0, \pi)$ tal que $g(c) = \cos(c) - c = 0$,

Exemplo

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ *tem pelo menos uma solução no intervalo* $[0, \pi]$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente

$$\cos(x) - x = 0.$$

Assim começaremos considerando a função $g(x) = \cos(x) - x$, que é contínua pois é soma de funções contínuas.Agora observamos que

$$g(0) = \cos(0) - 0 = 1,$$

e logo $g(0) > 0$ eque

$$g(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi,$$

e logo $g(\pi) < 0$.Logo pelo Teorema de Bolzano existe $c \in (0, \pi)$ tal que $g(c) = \cos(c) - c = 0$,e desta forma temos que a equação tem uma solução.

Example

Mostre que a equação $3^x = x^2 + 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$.

Example

Mostre que a equação $3^x = x^2 + 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente

$$3^x - x^2 - 4 = 0.$$

Assim começaremos considerando a função $g(x) = 3^x - x^2 - 4$,

Example

Mostre que a equação $3^x = x^2 + 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente

$$3^x - x^2 - 4 = 0.$$

Assim começaremos considerando a função $g(x) = 3^x - x^2 - 4$, que é contínua pois é soma de funções contínuas. Agora observamos que

$$g(1) = 3^1 - 1^2 - 4 = 3 - 1 - 4 = -2,$$

e logo $g(1) < 0$ e que

$$g(2) = 3^2 - 2^2 - 4 = 9 - 4 - 4 = 1,$$

e logo $g(2) > 0$. Logo pelo Teorema de Bolzano existe $c \in (1, 2)$ tal que $g(c) = 0$, e desta forma temos que a equação tem pelo menos uma solução.

Uma outra aplicação do teorema é a localização de zeros de uma função.

Exemplo

Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ *tem pelo menos uma solução real.*

Solução: Seja $f(x) = x^3 - 4x + 8$.

Uma outra aplicação do teorema é a localização de zeros de uma função.

Exemplo

Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ *tem pelo menos uma solução real.*

Solução: Seja $f(x) = x^3 - 4x + 8$.Temos que f é uma função contínua

Uma outra aplicação do teorema é a localização de zeros de uma função.

Exemplo

Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ *tem pelo menos uma solução real.*

Solução: Seja $f(x) = x^3 - 4x + 8$.Temos que f é uma função contínua e como

$$f(-2) = 8 > 0 \text{ e } f(-3) = -7 < 0$$

Uma outra aplicação do teorema é a localização de zeros de uma função.

Exemplo

Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ *tem pelo menos uma solução real.*

Solução: Seja $f(x) = x^3 - 4x + 8$.Temos que f é uma função contínua e como

$$f(-2) = 8 > 0 \text{ e } f(-3) = -7 < 0$$

pelo Teorema do Anulamento existe $c \in (-3, -2)$ tal que $f(c) = 0$,

Uma outra aplicação do teorema é a localização de zeros de uma função.

Exemplo

Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ *tem pelo menos uma solução real.*

Solução: Seja $f(x) = x^3 - 4x + 8$.Temos que f é uma função contínua e como

$$f(-2) = 8 > 0 \text{ e } f(-3) = -7 < 0$$

pelo Teorema do Anulamento existe $c \in (-3, -2)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, c é uma solução da equação.