Bases Matemáticas

Aula 4 – Conjuntos Numéricos

Rodrigo Hausen

Números Naturais, Inteiros e Racionais

- **naturais**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- **inteiros**:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- **racionais**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Subconjuntos

Dado um conjunto numérico $\mathbb{X}$...

- ... usa-se $\mathbb{X}^*$ para denotar um subconjunto numérico **sem o zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_+$ para denotar um subconjunto apenas com os **números maiores ou iguais a zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_-$ para denotar um subconjunto apenas com os **números menores ou iguais a zero**.

Subconjuntos

Dado um conjunto numérico $\mathbb{X}$...

- ... usa-se $\mathbb{X}^*$ para denotar um subconjunto numérico **sem o zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_+$ para denotar um subconjunto apenas com os **números maiores ou iguais a zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_-$ para denotar um subconjunto apenas com os **números menores ou iguais a zero**.

Exemplos 1.

- $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, \ldots\}$

Subconjuntos

Dado um conjunto numérico $\mathbb{X}$...

- ... usa-se $\mathbb{X}^*$ para denotar um subconjunto numérico **sem o zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_+$ para denotar um subconjunto apenas com os **números maiores ou iguais a zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_-$ para denotar um subconjunto apenas com os **números menores ou iguais a zero**.

Exemplos 1.

- $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Subconjuntos

Dado um conjunto numérico $\mathbb{X}$...

- ...usa-se $\mathbb{X}^*$ para denotar um subconjunto numérico **sem o zero**.
- ...usa-se $\mathbb{X}_+$ para denotar um subconjunto apenas com os **números maiores ou iguais a zero**.
- ...usa-se $\mathbb{X}_-$ para denotar um subconjunto apenas com os **números menores ou iguais a zero**.

Exemplos 1.

- $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{\ldots, -2, -1, 0\}$

Subconjuntos

Dado um conjunto numérico $\mathbb{X}$...

- ... usa-se $\mathbb{X}^*$ para denotar um subconjunto numérico **sem o zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_+$ para denotar um subconjunto apenas com os **números maiores ou iguais a zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_-$ para denotar um subconjunto apenas com os **números menores ou iguais a zero**.

Exemplos 1.

- $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{\ldots, -2, -1, 0\}$
- $\mathbb{Z}_-^* =$

Subconjuntos

Dado um conjunto numérico $\mathbb{X}$...

- ...usa-se $\mathbb{X}^*$ para denotar um subconjunto numérico **sem o zero**.
- ...usa-se $\mathbb{X}_+$ para denotar um subconjunto apenas com os **números maiores ou iguais a zero**.
- ...usa-se $\mathbb{X}_-$ para denotar um subconjunto apenas com os **números menores ou iguais a zero**.

Exemplos 1.

- $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{\ldots, -2, -1, 0\}$
- $\mathbb{Z}^*_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\} =$

Subconjuntos

Dado um conjunto numérico $\mathbb{X}$...

- ... usa-se $\mathbb{X}^*$ para denotar um subconjunto numérico **sem o zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_+$ para denotar um subconjunto apenas com os **números maiores ou iguais a zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_-$ para denotar um subconjunto apenas com os **números menores ou iguais a zero**.

Exemplos 1.

- $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{\ldots, -2, -1, 0\}$
- $\mathbb{Z}_-^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\} = \{\ldots, -2, -1\}$

Subconjuntos

Dado um conjunto numérico $\mathbb{X}$...

- ... usa-se $\mathbb{X}^*$ para denotar um subconjunto numérico **sem o zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_+$ para denotar um subconjunto apenas com os **números maiores ou iguais a zero**.
- ... usa-se $\mathbb{X}_-$ para denotar um subconjunto apenas com os **números menores ou iguais a zero**.

Exemplos 1.

- $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{\ldots, -2, -1, 0\}$
- $\mathbb{Z}_-^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\} = \{\ldots, -2, -1\}$

Da mesma forma, podemos definir $\mathbb{Z}_+^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, ...

Soma e multiplicação

Para os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de soma e multiplicação, com as seguintes propriedades:

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)

Soma e multiplicação

Para os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de soma e multiplicação, com as seguintes propriedades:

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade da multiplicação)

Soma e multiplicação

Para os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de soma e multiplicação, com as seguintes propriedades:

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade da multiplicação)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma)

Soma e multiplicação

Para os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de soma e multiplicação, com as seguintes propriedades:

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade da multiplicação)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma)
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade da multiplicação)

Soma e multiplicação

Para os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de soma e multiplicação, com as seguintes propriedades:

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade da multiplicação)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma)
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade da multiplicação)
5. $0 + a = a$ (elemento neutro da soma)

Soma e multiplicação

Para os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de soma e multiplicação, com as seguintes propriedades:

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade da multiplicação)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma)
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade da multiplicação)
5. $0 + a = a$ (elemento neutro da soma)
6. $1 \cdot a = a$ (elemento neutro da multiplicação)

Soma e multiplicação

Para os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de soma e multiplicação, com as seguintes propriedades:

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade da multiplicação)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma)
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade da multiplicação)
5. $0 + a = a$ (elemento neutro da soma)
6. $1 \cdot a = a$ (elemento neutro da multiplicação)
7. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade)

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
  - 0 é o único elemento que possui oposto

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
  - 0 é o único elemento que possui oposto
  - 1 é o único elemento que possui inverso

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
  - 0 é o único elemento que possui oposto
  - 1 é o único elemento que possui inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Z}$:

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
  - 0 é o único elemento que possui oposto
  - 1 é o único elemento que possui inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Z}$:
  - todo elemento possui oposto

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
    - 0 é o único elemento que possui oposto
    - 1 é o único elemento que possui inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Z}$:
    - todo elemento possui oposto
    - 1 e -1 são os únicos que possuem inverso

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
  - 0 é o único elemento que possui oposto
  - 1 é o único elemento que possui inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Z}$:
  - todo elemento possui oposto
  - 1 e -1 são os únicos que possuem inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Q}$

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
  - 0 é o único elemento que possui oposto
  - 1 é o único elemento que possui inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Z}$:
  - todo elemento possui oposto
  - 1 e -1 são os únicos que possuem inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Q}$ todo elemento possui oposto

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
  - 0 é o único elemento que possui oposto
  - 1 é o único elemento que possui inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Z}$:
  - todo elemento possui oposto
  - 1 e -1 são os únicos que possuem inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Q}$ todo elemento possui oposto e inverso

Existência de Elementos Opostos e Inversos

Dado um número a:

- dizemos que a' é o **oposto** aditivo de a se
$$a + a' = 0$$
- se $a \neq 0$, dizemos que $\overline{a}$ é o **inverso** multiplicativo de a se
$$a \cdot \overline{a} = 1$$

Existência de opostos e inversos:

- Para o conjunto $\mathbb{N}$:
  - 0 é o único elemento que possui oposto
  - 1 é o único elemento que possui inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Z}$:
  - todo elemento possui oposto
  - 1 e -1 são os únicos que possuem inverso
- Para o conjunto $\mathbb{Q}$ todo elemento possui oposto e inverso

O oposto de a é denotado $-a$. O inverso de a é denotado a^{-1}.

Potenciação

Seja a um número (natural, inteiro, racional) e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a n-**ésima potência de** a como:

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ (n vezes)} & \text{, se } n \neq 0 \\ & \end{cases}$$

Potenciação

Seja a um número (natural, inteiro, racional) e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a n-**ésima potência de** a como:

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ (n vezes)} & \text{, se } n \neq 0 \\ 1 & \text{, se } n = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Potenciação

Seja a um número (natural, inteiro, racional) e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a n-**ésima potência de** a como:

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ (n vezes)} & \text{, se } n \neq 0 \\ 1 & \text{, se } n = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Na operação de potenciação, dizemos que a é a **base** e n é o **expoente**.

Potenciação

Seja a um número (natural, inteiro, racional) e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a n-**ésima potência de** a como:

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ (n vezes)} & \text{, se } n \neq 0 \\ 1 & \text{, se } n = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Na operação de potenciação, dizemos que a é a **base** e n é o **expoente**.

Note que 0^0 é indeterminado! (Há motivos para não o definirmos.)

Potenciação

Seja a um número (natural, inteiro, racional) e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a n-**ésima potência de** a como:

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ (n vezes)} & \text{, se } n \neq 0 \\ 1 & \text{, se } n = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Na operação de potenciação, dizemos que a é a **base** e n é o **expoente**.

Note que 0^0 é indeterminado! (Há motivos para não o definirmos.)

Propriedades:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Potenciação: expoentes negativos

Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potenciação: expoentes negativos

Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriedades:

5. $a^{n-m} = a^n \cdot a^{-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Potenciação: expoentes negativos

Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

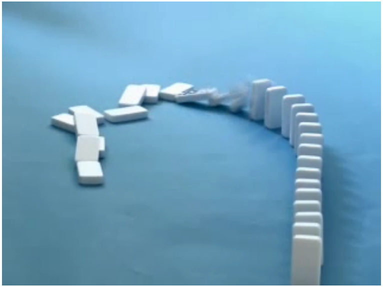
Propriedades:

5. $a^{n-m} = a^n \cdot a^{-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Mais adiante no curso, veremos como definir a operação potência para expoentes racionais.

Questão filosófica:

Em uma fileira de dominós, por que quando derrubamos o primeiro (na direção da próxima peça), todos os demais caem?



Crédito da imagem: http://www.isallaboutmath.com/

Para casa

Páginas 51 a 56 do livro de Caputi e Miranda:

- ler e fazer os exercícios.