

Bases Matemáticas

Juliana Pimentel

juliana.pimentel@ufabc.edu.br

15 de junho de 2016

Princípio de Indução Finita

Uma propriedade particularmente importante dos números naturais é expressa pelo Princípio de Indução Finita (PIF). No que se segue, $P(n)$ denota uma propriedade genérica, atribuível ao número natural genérico n . Se n satisfaz a propriedade $P(n)$, dizemos que $P(n)$ é verdadeira (caso contrário, que é falsa).

Princípio de Indução Finita

Seja $P(n)$ uma propriedade genérica que satisfaz as seguintes condições:

- ▶ (PIF 1) $P(n_0)$ é verdadeira para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$;
- ▶ (PIF 2) Para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq n_0$, tem-se: se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k + 1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Para provarmos a validade de uma propriedade, devemos verificar as duas condições PIF 1 e PIF 2. A primeira delas, em geral, é a mais simples, pois trata-se somente de acharmos um número natural que satisfaz a propriedade. Para verificar a validade da condição PIF 2, deve-se:

- ▶ (i) tomar um número natural genérico k ;
- ▶ (ii) assumir que a propriedade P vale para esse número, i.e. que $P(k)$ é verdadeira (nos referimos a isso como sendo a hipótese indutiva);
- ▶ (iii) usando a hipótese indutiva, provar que o número $k+1$ (i.e. o sucessor de k) também satisfaz a propriedade P , ou seja, que $P(k + 1)$ também é verdadeira.

Exemplo 1 Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n + 1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$$

Solução.

Exemplo 1 Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n + 1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$$

Solução. Para verificar a condição PIF 1, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira.

Exemplo 1 Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n + 1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$$

Solução. Para verificar a condição PIF 1, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira. Basta tomar $n = 1$.

Exemplo 1 Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n + 1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$$

Solução. Para verificar a condição PIF 1, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira. Basta tomar $n = 1$. De fato, a soma à esquerda na expressão acima é 1,

Exemplo 1 Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n + 1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$$

Solução. Para verificar a condição PIF 1, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira. Basta tomar $n = 1$. De fato, a soma à esquerda na expressão acima é 1, enquanto o termo à direita é

$$\frac{1(1 + 1)}{2} = 1$$

Exemplo 1 Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n + 1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$$

Solução. Para verificar a condição PIF 1, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira. Basta tomar $n = 1$. De fato, a soma à esquerda na expressão acima é 1, enquanto o termo à direita é

$$\frac{1(1 + 1)}{2} = 1$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2,

Exemplo 1 Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n + 1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$$

Solução. Para verificar a condição PIF 1, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira. Basta tomar $n = 1$. De fato, a soma à esquerda na expressão acima é 1, enquanto o termo à direita é

$$\frac{1(1 + 1)}{2} = 1$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação

$$P(k) \Rightarrow P(k + 1).$$

Continuação...

Logo, a nossa hipótese indutiva é:

Continuação...

Logo, a nossa hipótese indutiva é:

$$P(k) : 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Continuação...

Logo, a nossa hipótese indutiva é:

$$P(k) : 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Temos então

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) =$$

Continuação...

Logo, a nossa hipótese indutiva é:

$$P(k) : 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Temos então

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} +$$

Continuação...

Logo, a nossa hipótese indutiva é:

$$P(k) : 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Temos então

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

Continuação...

Logo, a nossa hipótese indutiva é:

$$P(k) : 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Temos então

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} =$$
$$=$$

Continuação...

Logo, a nossa hipótese indutiva é:

$$P(k) : 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Temos então

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é

$$P(k+1) : 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n > 1$, i.e. para todo natural positivo. $\square$

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita.

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita. Para provar a condição PIF 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$P(k) : 2^k \geq 1 + k.$$

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita. Para provar a condição PIF 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$P(k) : 2^k \geq 1 + k.$$

Queremos mostrar que

$$P(k + 1) : 2^{(k+1)} \geq 1 + (k + 1)$$

é válida.

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita. Para provar a condição PIF 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$P(k) : 2^k \geq 1 + k.$$

Queremos mostrar que

$$P(k + 1) : 2^{(k+1)} \geq 1 + (k + 1)$$

é válida. Temos

$$2^{k+1} =$$

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita. Para provar a condição PIF 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$P(k) : 2^k \geq 1 + k.$$

Queremos mostrar que

$$P(k + 1) : 2^{(k+1)} \geq 1 + (k + 1)$$

é válida. Temos

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$$

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita. Para provar a condição PIF 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$P(k) : 2^k \geq 1 + k.$$

Queremos mostrar que

$$P(k + 1) : 2^{(k+1)} \geq 1 + (k + 1)$$

é válida. Temos

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot (1 + k) =$$

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita. Para provar a condição PIF 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$P(k) : 2^k \geq 1 + k.$$

Queremos mostrar que

$$P(k + 1) : 2^{(k+1)} \geq 1 + (k + 1)$$

é válida. Temos

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot (1 + k) = 2 + 2k$$

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita. Para provar a condição PIF 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$P(k) : 2^k \geq 1 + k.$$

Queremos mostrar que

$$P(k + 1) : 2^{(k+1)} \geq 1 + (k + 1)$$

é válida. Temos

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot (1 + k) = 2 + 2k \geq 2 + k =$$

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade

$$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$$

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, a condição PIF 1 é satisfeita. Para provar a condição PIF 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$P(k) : 2^k \geq 1 + k.$$

Queremos mostrar que

$$P(k + 1) : 2^{(k+1)} \geq 1 + (k + 1)$$

é válida. Temos

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot (1 + k) = 2 + 2k \geq 2 + k = 1 + (k + 1).$$

A condição PIF 2, portanto, também é válida. Logo, pelo PIF, a propriedade P vale para todo número natural. $\square$

Princípio de Indução Finita - 2a versão: Seja $P(n)$ uma propriedade genérica que satisfaz as seguintes condições:

- ▶ (PIF 1) $P(n_0)$ é verdadeira para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$;
- ▶ (PIF 2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$, tem-se: se $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$, com $n_0 \leq k < n$, então $P(n)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Exemplo 3 Prove que

$P(n)$: n é primo ou é produto de números primos

é verdadeira, para todo $n > 1$.

Solução. A condição PIF 1 é satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira.

Exemplo 3 Prove que

$P(n)$: n é primo ou é produto de números primos

é verdadeira, para todo $n > 1$.

Solução. A condição PIF 1 é satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira. Vamos verificar PIF 2 (2a versão). Fixado $n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$, nossa hipótese indutiva é:

se $2 \leq k < n$, então k é primo ou é produto de primos.

Queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeira.

Exemplo 3 Prove que

$P(n)$: n é primo ou é produto de números primos

é verdadeira, para todo $n > 1$.

Solução. A condição PIF 1 é satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira. Vamos verificar PIF 2 (2a versão). Fixado $n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$, nossa hipótese indutiva é:

se $2 \leq k < n$, então k é primo ou é produto de primos.

Queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeira. Evidentemente, n é primo ou não é. Se for primo, então $P(n)$ é verdadeira.

Exemplo 3 Prove que

$P(n)$: n é primo ou é produto de números primos

é verdadeira, para todo $n > 1$.

Solução. A condição PIF 1 é satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira. Vamos verificar PIF 2 (2a versão). Fixado $n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$, nossa hipótese indutiva é:

se $2 \leq k < n$, então k é primo ou é produto de primos.

Queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeira. Evidentemente, n é primo ou não é. Se for primo, então $P(n)$ é verdadeira. Se n não é primo, então deve existir um número primo p que divide n , i.e.,

Exemplo 3 Prove que

$P(n)$: n é primo ou é produto de números primos

é verdadeira, para todo $n > 1$.

Solução. A condição PIF 1 é satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira. Vamos verificar PIF 2 (2a versão). Fixado $n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$, nossa hipótese indutiva é:

se $2 \leq k < n$, então k é primo ou é produto de primos.

Queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeira. Evidentemente, n é primo ou não é. Se for primo, então $P(n)$ é verdadeira. Se n não é primo, então deve existir um número primo p que divide n , i.e., $n = p.k$, para um certo $k \in \mathbb{N}$. Ora, como $k > 1$ (pois $p \neq n$) e $k < n$ (pois $p > 1$) podemos usar a hipótese indutiva para k :

Exemplo 3 Prove que

$P(n)$: n é primo ou é produto de números primos

é verdadeira, para todo $n > 1$.

Solução. A condição PIF 1 é satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira. Vamos verificar PIF 2 (2a versão). Fixado $n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$, nossa hipótese indutiva é:

se $2 \leq k < n$, então k é primo ou é produto de primos.

Queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeira. Evidentemente, n é primo ou não é. Se for primo, então $P(n)$ é verdadeira. Se n não é primo, então deve existir um número primo p que divide n , i.e., $n = p.k$, para um certo $k \in \mathbb{N}$. Ora, como $k > 1$ (pois $p \neq n$) e $k < n$ (pois $p > 1$) podemos usar a hipótese indutiva para k : k é primo ou é produto de primos. Consequentemente, $n = p.k$ é um produto de primos, i.e., $P(n)$ é verdadeira. Assim, P vale para todo natural maior que 1. $\square$