Bases Matemáticas

Aula 7 – Os Números Reais

Rodrigo Hausen

10 de outubro de 2012

Uma definição de número racional

Vamos começar nosso estudo de números reais baseando-nos em uma definição alternativa dos racionais que usa a representação decimal:

Definição 1 (número racional)

Um número racional é aquele cuja representação decimal mais curta possui um ***sinal*** *(podendo estar implícito) e um* ***número finito de algarismos ou uma dízima periódica*** [a] ***a partir de uma certa casa decimal****.*

[a] sequência infinita de algarismos decimais que se repetem após um certo período

Uma definição de número racional

Vamos começar nosso estudo de números reais baseando-nos em uma definição alternativa dos racionais que usa a representação decimal:

Definição 1 (número racional)

Um número racional é aquele cuja representação decimal mais curta possui um ***sinal*** *(podendo estar implícito) e um* ***número finito de algarismos ou uma dízima periódica*** [a] ***a partir de uma certa casa decimal****.*

[a] sequência infinita de algarismos decimais que se repetem após um certo período

(Problemas com esta definição: tem que provar que todo número racional possui representação decimal, que a representação mais curta é única, e que o mesmo vale para qualquer base de numeração inteira e finita, ou seja, que a base 10 não é privilegiada.)

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*
- $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ *(dois algarismos, um após a vírgula)*

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*
- $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ *(dois algarismos, um após a vírgula)*
- $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ *(repetição infinita do 3 após a vírgula)*

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*
- $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ *(dois algarismos, um após a vírgula)*
- $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ *(repetição infinita do 3 após a vírgula)*
- $\frac{42}{9900} =$

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*
- $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ *(dois algarismos, um após a vírgula)*
- $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ *(repetição infinita do 3 após a vírgula)*
- $\frac{42}{9900} = \frac{\frac{42}{99}}{100} =$

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*
- $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ *(dois algarismos, um após a vírgula)*
- $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ *(repetição infinita do 3 após a vírgula)*
- $\frac{42}{9900} = \frac{\frac{42}{99}}{100} = \frac{0{,}424242...}{100} =$

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*
- $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ *(dois algarismos, um após a vírgula)*
- $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ *(repetição infinita do 3 após a vírgula)*
- $\frac{42}{9900} = \frac{\frac{42}{99}}{100} = \frac{0,424242...}{100} = 0,00424242\ldots$ *(repetição da sequência 42 após a 3ª casa decimal)*

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*
- $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ *(dois algarismos, um após a vírgula)*
- $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ *(repetição infinita do 3 após a vírgula)*
- $\frac{42}{9900} = \frac{\frac{42}{99}}{100} = \frac{0{,}424242\ldots}{100} = 0,00424242\ldots$ *(repetição da sequência 42 após a 3ª casa decimal)*

Obs1.: Para demonstrar que a definição 1 equivale à definição tradicional de racional, é preciso demonstrar primeiro o seguinte teorema: na base decimal, vale a igualdade $0,xyzxyzxyz\ldots = \frac{xyz}{999}$

Exemplo 1

São números racionais:

- 1 *(um algarismo)*
- $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ *(dois algarismos, um após a vírgula)*
- $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ *(repetição infinita do 3 após a vírgula)*
- $\frac{42}{9900} = \frac{\frac{42}{99}}{100} = \frac{0{,}424242...}{100} = 0,00424242\dots$ *(repetição da sequência 42 após a 3ª casa decimal)*

Obs1.: Para demonstrar que a definição 1 equivale à definição tradicional de racional, é preciso demonstrar primeiro o seguinte teorema: na base decimal, vale a igualdade $0,xyzxyzxyz\dots = \frac{xyz}{999}$

Obs2.: Pelo teorema acima, $0,999\dots = \frac{9}{9} = 1$.

Definição de número real por representação decimal

Apesar da definição de um número real por meio da sua representação decimal não ser a mais utilizada em matemática, para nossos propósitos, por enquanto, será a que nós utilizaremos, pois é a mais fácil de ser compreendida por iniciantes.

Definição 2 (número real)

Um número real é aquele que possui representação decimal (seja ela finita, infinita periódica ou infinita não-periódica) com sinal .

Definição de número real por representação decimal

Apesar da definição de um número real por meio da sua representação decimal não ser a mais utilizada em matemática, para nossos propósitos, por enquanto, será a que nós utilizaremos, pois é a mais fácil de ser compreendida por iniciantes.

Definição 2 (número real)

Um número real é aquele que possui representação decimal (seja ela finita, infinita periódica ou infinita não-periódica) com sinal .

Propriedade imediata desta definição: todo número racional é real.

Definição de número real por representação decimal

Apesar da definição de um número real por meio da sua representação decimal não ser a mais utilizada em matemática, para nossos propósitos, por enquanto, será a que nós utilizaremos, pois é a mais fácil de ser compreendida por iniciantes.

Definição 2 (número real)

Um número real é aquele que possui representação decimal (seja ela finita, infinita periódica ou infinita não-periódica) com sinal .

Propriedade imediata desta definição: todo número racional é real.

Exemplo 2

Além dos exemplos no exemplo 1, são números reais:

- $\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242096980785696 71\ldots$

Definição de número real por representação decimal

Apesar da definição de um número real por meio da sua representação decimal não ser a mais utilizada em matemática, para nossos propósitos, por enquanto, será a que nós utilizaremos, pois é a mais fácil de ser compreendida por iniciantes.

Definição 2 (número real)

Um número real é aquele que possui representação decimal (seja ela finita, infinita periódica ou infinita não-periódica) com sinal .

Propriedade imediata desta definição: todo número racional é real.

Exemplo 2

Além dos exemplos no exemplo 1, são números reais:

- $\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242096980785696\,71\ldots$
- $\pi \approx 3.14159265358979323846264338327950288419716\,9\ldots$

Obs.: números irracionais

- $\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242096980785696 71\ldots$
- $\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971 69\ldots$

Tente achar um padrão de repetição entre os primeiros 100 algarismos após a vírgula de qualquer número irracional.

Obs.: números irracionais

- $\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242096980785696671\ldots$
- $\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971 69\ldots$

Tente achar um padrão de repetição entre os primeiros 100 algarismos após a vírgula de qualquer número irracional.

Se conseguir, tente generalizar.

Obs.: números irracionais

- $\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242096980785696 71\ldots$
- $\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971 69\ldots$

Tente achar um padrão de repetição entre os primeiros 100 algarismos após a vírgula de qualquer número irracional.

Se conseguir, tente generalizar.

Se conseguir generalizar, publique um artigo e exija sua Medalha Fields.

Definição dos números reais por sequências

Definição 3 (número real)

Um número é real se existe alguma sequência de números racionais que converge para esse número.

(É preciso saber o que se quer dizer com "uma sequência converge para um número.")

Definição 3 (número real)

Um número é real se existe alguma sequência de números racionais que converge para esse número.

(É preciso saber o que se quer dizer com "uma sequência converge para um número.")

As definições 2 e 3, de número real, são equivalentes.

Exemplo 3

Podemos demonstrar que
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \ldots$, *portanto* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "+" (soma) e "·" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

Definição axiomática dos números reais

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto* $\mathbb{K}$ *que possui operações "+" (soma) e "·" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9* $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$*:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "+" (soma) e "·" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

A2: $x + y = y + x$ *(soma é comutativa)*

Definição axiomática dos números reais

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "+" (soma) e "·" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

A2: $x + y = y + x$ *(soma é comutativa)*

A3: *Existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$ *(há elemento neutro da soma)*

Definição axiomática dos números reais

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "$+$" (soma) e "$\cdot$" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

A2: $x + y = y + x$ *(soma é comutativa)*

A3: *Existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$ *(há elemento neutro da soma)*

A4: *Existe* $-x \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(há oposto aditivo)*

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "+" (soma) e "·" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

A2: $x + y = y + x$ *(soma é comutativa)*

A3: *Existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$ *(há elemento neutro da soma)*

A4: *Existe* $-x \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(há oposto aditivo)*

A5: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(multiplicação é associativa)*

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "+" (soma) e "·" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

A2: $x + y = y + x$ *(soma é comutativa)*

A3: *Existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$ *(há elemento neutro da soma)*

A4: *Existe* $-x \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(há oposto aditivo)*

A5: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(multiplicação é associativa)*

A6: $x \cdot y = y \cdot x$ *(multiplicação é comutativa)*

Definição axiomática dos números reais

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "+" (soma) e "·" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

A2: $x + y = y + x$ *(soma é comutativa)*

A3: *Existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$ *(há elemento neutro da soma)*

A4: *Existe* $-x \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(há oposto aditivo)*

A5: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(multiplicação é associativa)*

A6: $x \cdot y = y \cdot x$ *(multiplicação é comutativa)*

A7: *Existe* $1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \cdot 1 = x$ *(há elemento neutro da multiplicação)*

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "$+$" (soma) e "$\cdot$" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

A2: $x + y = y + x$ *(soma é comutativa)*

A3: *Existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$ *(há elemento neutro da soma)*

A4: *Existe* $-x \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(há oposto aditivo)*

A5: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(multiplicação é associativa)*

A6: $x \cdot y = y \cdot x$ *(multiplicação é comutativa)*

A7: *Existe* $1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \cdot 1 = x$ *(há elemento neutro da multiplicação)*

A8: *Se* $x \neq 0$, *existe* $x^{-1} \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$ *(há inverso multiplicativo)*

Definição 4 (corpo de números)

*Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ que possui operações "+" (soma) e "$\cdot$" (multiplicação) que satisfazem as propriedades A0–A9 $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$:*

A0: $x + y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y \in \mathbb{K}$, *(a soma e o produto de elementos do corpo sempre é elemento do corpo)*

A1: $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(soma é associativa)*

A2: $x + y = y + x$ *(soma é comutativa)*

A3: *Existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$ *(há elemento neutro da soma)*

A4: *Existe* $-x \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(há oposto aditivo)*

A5: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(multiplicação é associativa)*

A6: $x \cdot y = y \cdot x$ *(multiplicação é comutativa)*

A7: *Existe* $1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \cdot 1 = x$ *(há elemento neutro da multiplicação)*

A8: *Se* $x \neq 0$, *existe* $x^{-1} \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$ *(há inverso multiplicativo)*

A9: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *(multiplicação pode ser distribuída sobre a soma)*

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:
  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo...

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:
  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo...
- **Porém**, existem outros conjuntos que satisfazem os axiomas de corpo:

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:

  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo...
- **Porém**, existem outros conjuntos que satisfazem os axiomas de corpo:
  - O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de soma e multiplicação de frações

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:

  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo...
- **Porém**, existem outros conjuntos que satisfazem os axiomas de corpo:
  - O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de soma e multiplicação de frações
  - O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:

  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo...
- **Porém**, existem outros conjuntos que satisfazem os axiomas de corpo:
  - O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de soma e multiplicação de frações
  - O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos: pares ordenados (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$,

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:

  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo. . .
- **Porém**, existem outros conjuntos que satisfazem os axiomas de corpo:
  - O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de soma e multiplicação de frações
  - O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos: pares ordenados (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$, soma $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:

  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo...
- **Porém**, existem outros conjuntos que satisfazem os axiomas de corpo:
  - O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de soma e multiplicação de frações
  - O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos: pares ordenados (a,b), com $a,b \in \mathbb{R}$, soma $(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$ e multiplicação $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:
  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo. . .
- **Porém**, existem outros conjuntos que satisfazem os axiomas de corpo:
  - O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de soma e multiplicação de frações
  - O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos: pares ordenados (a,b), com $a, b \in \mathbb{R}$, soma $(a,b) + (c,d) = (a+b, c+d)$ e multiplicação $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$
- Logo, é preciso mais alguma coisa para definir os reais sem ambiguidade.

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades de A0 até A9 são chamadas **axiomas de corpo**.
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:
  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo...
- **Porém**, existem outros conjuntos que satisfazem os axiomas de corpo:
  - O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de soma e multiplicação de frações
  - O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos: pares ordenados (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$, soma $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ e multiplicação $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
- Logo, é preciso mais alguma coisa para definir os reais sem ambiguidade. Por enquanto, ficaremos com a definição incompleta:
  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo que...

Os reais são um corpo: consequências

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Os reais são um corpo: consequências

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Exercício 1

Demonstre que só existe um único elemento neutro da soma no conjunto dos números reais.

Os reais são um corpo: consequências

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Exercício 1

Demonstre que só existe um único elemento neutro da soma no conjunto dos números reais.

Demonstração:

Os reais são um corpo: consequências

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Exercício 1

Demonstre que só existe um único elemento neutro da soma no conjunto dos números reais.

Demonstração: Seja Z um elemento neutro da soma,

Os reais são um corpo: consequências

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Exercício 1

Demonstre que só existe um único elemento neutro da soma no conjunto dos números reais.

Demonstração: Seja Z um elemento neutro da soma, ou seja, $Z \in \mathbb{R}$ tal que $x + Z = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

Os reais são um corpo: consequências

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Exercício 1

Demonstre que só existe um único elemento neutro da soma no conjunto dos números reais.

Demonstração: Seja Z um elemento neutro da soma, ou seja, $Z \in \mathbb{R}$ tal que $x + Z = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; em particular, podemos escolher $x = 0$,

Os reais são um corpo: consequências

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Exercício 1

Demonstre que só existe um único elemento neutro da soma no conjunto dos números reais.

Demonstração: Seja Z um elemento neutro da soma, ou seja, $Z \in \mathbb{R}$ tal que $x + Z = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; em particular, podemos escolher $x = 0$, logo, por hipótese, $0 + Z = 0$.

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Exercício 1

Demonstre que só existe um único elemento neutro da soma no conjunto dos números reais.

Demonstração: Seja Z um elemento neutro da soma, ou seja, $Z \in \mathbb{R}$ tal que $x + Z = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; em particular, podemos escolher $x = 0$, logo, por hipótese, $0 + Z = 0$. Assim, como 0 também é um elemento neutro, e como é válida a comutatividade da soma, podemos escrever

$$\overbrace{0 = 0 + Z}^{A3} = \overbrace{Z + 0 = Z}^{A3}.$$

$$\underbrace{0 + Z = Z + 0}_{A2}$$

Os reais são um corpo: consequências

Podemos obter algumas propriedades dos reais a partir do fato de que $\mathbb{R}$ é um corpo por definição.

Exercício 1

Demonstre que só existe um único elemento neutro da soma no conjunto dos números reais.

Demonstração: Seja Z um elemento neutro da soma, ou seja, $Z \in \mathbb{R}$ tal que $x + Z = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; em particular, podemos escolher $x = 0$, logo, por hipótese, $0 + Z = 0$. Assim, como 0 também é um elemento neutro, e como é válida a comutatividade da soma, podemos escrever

$$0 = \overbrace{0 + Z}^{A3} = \underbrace{Z + 0}_{A2} \ldots$$

$$0 \overset{A3}{=} \underbrace{0 + Z = Z + 0}_{A2} \overset{A3}{=} Z.$$

Logo $Z = 0$, ou seja, 0 é o único elemento neutro da soma. ■

De forma similar ao exercício 1, podemos demonstrar:

Exercício 2 (para casa)

Demonstre que 1 *é o único elemento neutro da multiplicação.*

Os reais são um corpo: consequências

Exercício 3

Demonstre que $x \cdot 0 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Os reais são um corpo: consequências

Exercício 3

Demonstre que $x \cdot 0 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) \qquad \text{(por A3)}$$

Exercício 3

Demonstre que $x \cdot 0 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) \qquad \text{(por A3)}$$

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 \qquad \text{(por A9)}$$

Exercício 3

Demonstre que $x \cdot 0 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) \qquad \text{(por A3)}$$

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 \qquad \text{(por A9)}$$

$$x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0) \qquad \text{(como } x \cdot 0 \in \mathbb{R}\text{, A4 garante a existência de } -x \cdot 0\text{)}$$

Exercício 3

Demonstre que $x \cdot 0 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
x \cdot 0 &= x \cdot (0 + 0) && \text{(por A3)} \\
x \cdot 0 &= x \cdot 0 + x \cdot 0 && \text{(por A9)} \\
x \cdot 0 + (-x \cdot 0) &= x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0) && \text{(como } x \cdot 0 \in \mathbb{R}\text{, A4 garante a existência de } -x \cdot 0\text{)} \\
0 &= x \cdot 0 && \text{(por A4)} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 3

Demonstre que $x \cdot 0 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
x \cdot 0 &= x \cdot (0 + 0) && \text{(por A3)} \\
x \cdot 0 &= x \cdot 0 + x \cdot 0 && \text{(por A9)} \\
x \cdot 0 + (-x \cdot 0) &= x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0) && \text{(como } x \cdot 0 \in \mathbb{R}\text{, A4 garante a existência de } -x \cdot 0\text{)} \\
0 &= x \cdot 0 && \text{(por A4)} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 4 (para casa)

Dado $x \in \mathbb{R}$, *demonstre que o oposto de* x *é único e que o inverso de* x *(se* $x \neq 0$, *claro) também é único.*

Exercício 5

Demonstre que $(-1) \cdot x = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Exercício 5

Demonstre que $(-1) \cdot x = -x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos aplicar propriedades a $x + (-1) \cdot x$:

Exercício 5

Demonstre que $(-1) \cdot x = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos aplicar propriedades a $x + (-1) \cdot x$:

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x \qquad \text{(por A7)}$$

Exercício 5

Demonstre que $(-1) \cdot x = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos aplicar propriedades a $x + (-1) \cdot x$:

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{(por A7)} \\ &= (1 + (-1)) \cdot x && \text{(por A9)} \end{aligned}$$

Exercício 5

Demonstre que $(-1) \cdot x = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Demonstração: Vamos aplicar propriedades a $x + (-1) \cdot x$:

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{(por A7)} \\ &= (1 + (-1)) \cdot x && \text{(por A9)} \\ &= 0 \cdot x && \text{(por A4)} \end{aligned}$$

Exercício 5

Demonstre que $(-1) \cdot x = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Demonstração: Vamos aplicar propriedades a $x + (-1) \cdot x$:

$$
\begin{aligned}
x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{(por A7)} \\
&= (1 + (-1)) \cdot x && \text{(por A9)} \\
&= 0 \cdot x && \text{(por A4)} \\
x + (-1) \cdot x &= 0 && \text{(do Exer. 3)}
\end{aligned}
$$

Exercício 5

Demonstre que $(-1) \cdot x = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos aplicar propriedades a $x + (-1) \cdot x$:

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{(por A7)} \\ &= (1 + (-1)) \cdot x && \text{(por A9)} \\ &= 0 \cdot x && \text{(por A4)} \\ x + (-1) \cdot x &= 0 && \text{(do Exer. 3)} \end{aligned}$$

Como $x + (-1) \cdot x = 0$, então $(-1) \cdot x$ é o oposto aditivo de x,

Exercício 5

Demonstre que $(-1) \cdot x = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos aplicar propriedades a $x + (-1) \cdot x$:

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{(por A7)} \\ &= (1 + (-1)) \cdot x && \text{(por A9)} \\ &= 0 \cdot x && \text{(por A4)} \\ x + (-1) \cdot x &= 0 && \text{(do Exer. 3)} \end{aligned}$$

Como $x + (-1) \cdot x = 0$, então $(-1) \cdot x$ é o oposto aditivo de x, e como, pela propriedade encontrada no exercício 4, o oposto de x é único, então $-x = (-1) \cdot x$. ■

Exercício 6 (para casa)

Demonstre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *temos que* $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

Exercício 7 (para casa)

Demonstre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *temos que:*

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Axiomas de Ordem

Vimos que definir os reais como um corpo é não é suficiente para identificá-los de maneira única. Precisamos de mais ordem na casa!

Axiomas de Ordem

Vimos que definir os reais como um corpo é não é suficiente para identificá-los de maneira única. Precisamos de mais ordem na casa!

Definição 5 (relação de ordem total)

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma relação $\leq$, válida para elementos de $\mathbb{K}$, é chamada ***ordem total*** *se ela satisfaz:*

Axiomas de Ordem

Vimos que definir os reais como um corpo é não é suficiente para identificá-los de maneira única. Precisamos de mais ordem na casa!

Definição 5 (relação de ordem total)

*Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma relação $\leq$, válida para elementos de $\mathbb{K}$, é chamada **ordem total** se ela satisfaz:*

- *A10:* *Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$ valem:*
  - *A10.1:* $x \leq x$ *(reflexiva)*

Axiomas de Ordem

Vimos que definir os reais como um corpo é não é suficiente para identificá-los de maneira única. Precisamos de mais ordem na casa!

Definição 5 (relação de ordem total)

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma relação $\leq$, válida para elementos de $\mathbb{K}$, é chamada ***ordem total*** *se ela satisfaz:*

- *A10:* Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$ valem:
  - *A10.1:* $x \leq x$ *(reflexiva)*
  - *A10.2:* Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ *(transitiva)*

Axiomas de Ordem

Vimos que definir os reais como um corpo é não é suficiente para identificá-los de maneira única. Precisamos de mais ordem na casa!

Definição 5 (relação de ordem total)

*Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma relação $\leq$, válida para elementos de $\mathbb{K}$, é chamada **ordem total** se ela satisfaz:*

- *A10: Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$ valem:*
  - *A10.1: $x \leq x$* *(reflexiva)*
  - *A10.2: Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$* *(transitiva)*
  - *A10.3: pelo menos uma das duas afirmações é válida: $x \leq y$ ou $y \leq x$* *(total)*

Axiomas de Ordem

Vimos que definir os reais como um corpo é não é suficiente para identificá-los de maneira única. Precisamos de mais ordem na casa!

Definição 5 (relação de ordem total)

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma relação $\leq$, válida para elementos de $\mathbb{K}$, é chamada ***ordem total*** *se ela satisfaz:*

- *A10:* *Para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{K}$ *valem:*
  - *A10.1:* $x \leq x$ *(reflexiva)*
  - *A10.2:* *Se* $x \leq y$ *e* $y \leq z$*, então* $x \leq z$ *(transitiva)*
  - *A10.3:* *pelo menos uma das duas afirmações é válida:* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$ *(total)*
  - *A10.4:* *Se* $x \leq y$ ***e*** $y \leq x$*, então* $x = y$ *(anti-simétrica)*

Axiomas de Ordem

Vimos que definir os reais como um corpo é não é suficiente para identificá-los de maneira única. Precisamos de mais ordem na casa!

Definição 5 (relação de ordem total)

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma relação $\leq$, válida para elementos de $\mathbb{K}$, é chamada ***ordem total*** *se ela satisfaz:*

- *A10:* Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$ valem:
  - *A10.1:* $x \leq x$ *(reflexiva)*
  - *A10.2:* Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ *(transitiva)*
  - *A10.3:* pelo menos uma das duas afirmações é válida: $x \leq y$ ou $y \leq x$ *(total)*
  - *A10.4:* Se $x \leq y$ **e** $y \leq x$, então $x = y$ *(anti-simétrica)*
- *A11:* $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ tais que $x \leq y$, temos que $x + z \leq y + z$ *(compatível com a soma)*

Axiomas de Ordem

Vimos que definir os reais como um corpo é não é suficiente para identificá-los de maneira única. Precisamos de mais ordem na casa!

Definição 5 (relação de ordem total)

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma relação $\leq$, válida para elementos de $\mathbb{K}$, é chamada ***ordem total*** *se ela satisfaz:*

- *A10:* *Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$ valem:*
  - *A10.1:* $x \leq x$ *(reflexiva)*
  - *A10.2:* *Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$* *(transitiva)*
  - *A10.3:* *pelo menos uma das duas afirmações é válida: $x \leq y$ ou $y \leq x$* *(total)*
  - *A10.4:* *Se $x \leq y$* ***e*** *$y \leq x$, então $x = y$* *(anti-simétrica)*
- *A11:* *$\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ tais que $x \leq y$, temos que $x + z \leq y + z$* *(compatível com a soma)*
- *A12:* *$\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ tais que $x \leq y$ e $0 \leq z$, temos que $x \cdot z \leq y \cdot z$* *(compatível com a multiplicação)*

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades A10–A12 são chamadas **axiomas de ordem**

- As propriedades A10–A12 são chamadas **axiomas de ordem**
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:

  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo que possui uma relação de ordem total "$\leq$", e que ...

  ("é um corpo": satisfaz A0–A9, "tem ordem total": satisfaz A10–A12)

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades A10–A12 são chamadas **axiomas de ordem**
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:
  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo que possui uma relação de ordem total "$\leq$", e que ...
  ("é um corpo": satisfaz A0–A9, "tem ordem total": satisfaz A10–A12)
- Note que, adicionando os axiomas de corpo, diferenciamos $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ (números complexos não possuem ordem total)

Definição axiomática dos números reais

- As propriedades A10–A12 são chamadas **axiomas de ordem**
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:
  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo que possui uma relação de ordem total "$\leq$", e que ...
  ("é um corpo": satisfaz A0–A9, "tem ordem total": satisfaz A10–A12)
- Note que, adicionando os axiomas de corpo, diferenciamos $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ (números complexos não possuem ordem total)
- Mas, ainda assim, note que $\mathbb{Q}$ possui relação de ordem total.

- As propriedades A10–A12 são chamadas **axiomas de ordem**
- Na nova definição do conjunto dos números reais, diremos o seguinte:
  Definição (números reais) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo que possui uma relação de ordem total "$\leq$", e que ...
  ("é um corpo": satisfaz A0–A9, "tem ordem total": satisfaz A10–A12)
- Note que, adicionando os axiomas de corpo, diferenciamos $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ (números complexos não possuem ordem total)
- Mas, ainda assim, note que $\mathbb{Q}$ possui relação de ordem total.

Definição 6

*O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo, que possui uma relação de ordem total "$\leq$", e satisfaz o **axioma de completude**.*

Veremos esse tal de "axioma de completude" mais à frente. Por enquanto, satisfaz dizer que ele é o "molho secreto" que diferencia os reais dos racionais.

Relações de ordem

A partir da relação de ordem "$\leq$", construímos as demais relações:

Relações de ordem

A partir da relação de ordem "$\leq$", construímos as demais relações:

- **Relação "maior ou igual"**: definimos $x \geq y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$.

Relações de ordem

A partir da relação de ordem "$\leq$", construímos as demais relações:

- **Relação "maior ou igual"**: definimos $x \geq y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$.
- **Relação "estritamente menor"**: definimos $x < y$ como sendo a mesma coisa que $x \leq y$, onde $x \neq y$.

Relações de ordem

A partir da relação de ordem "$\leq$", construímos as demais relações:

- **Relação "maior ou igual"**: definimos $x \geq y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$.
- **Relação "estritamente menor"**: definimos $x < y$ como sendo a mesma coisa que $x \leq y$, onde $x \neq y$.
- **Relação "estritamente maior"**: definimos $x > y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$, onde $x \neq y$.

Relações de ordem

A partir da relação de ordem "$\leq$", construímos as demais relações:

- **Relação "maior ou igual"**: definimos $x \geq y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$.
- **Relação "estritamente menor"**: definimos $x < y$ como sendo a mesma coisa que $x \leq y$, onde $x \neq y$.
- **Relação "estritamente maior"**: definimos $x > y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$, onde $x \neq y$.

Note que, para a relação de ordem estrita "$<$", **apenas uma** das duas afirmações será válida: $x < y$ ou $y < x$.

A partir da relação de ordem "$\leq$", construímos as demais relações:

- **Relação "maior ou igual"**: definimos $x \geq y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$.
- **Relação "estritamente menor"**: definimos $x < y$ como sendo a mesma coisa que $x \leq y$, onde $x \neq y$.
- **Relação "estritamente maior"**: definimos $x > y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$, onde $x \neq y$.

Note que, para a relação de ordem estrita "$<$", **apenas uma** das duas afirmações será válida: $x < y$ ou $y < x$. Note, também, que a propriedade A10.1 não é válida para a ordem estrita, pois não é verdade que $x < x$.

Relações de ordem

A partir da relação de ordem "$\leq$", construímos as demais relações:

- **Relação "maior ou igual"**: definimos $x \geq y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$.
- **Relação "estritamente menor"**: definimos $x < y$ como sendo a mesma coisa que $x \leq y$, onde $x \neq y$.
- **Relação "estritamente maior"**: definimos $x > y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$, onde $x \neq y$.

Note que, para a relação de ordem estrita "$<$", **apenas uma** das duas afirmações será válida: $x < y$ ou $y < x$. Note, também, que a propriedade A10.1 não é válida para a ordem estrita, pois não é verdade que $x < x$. Logo, apenas as propriedades A10.2, A10.3, A11 e A12 valem para "$<$".

Relações de ordem

A partir da relação de ordem "$\leq$", construímos as demais relações:

- **Relação "maior ou igual"**: definimos $x \geq y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$.
- **Relação "estritamente menor"**: definimos $x < y$ como sendo a mesma coisa que $x \leq y$, onde $x \neq y$.
- **Relação "estritamente maior"**: definimos $x > y$ como sendo a mesma coisa que $y \leq x$, onde $x \neq y$.

Note que, para a relação de ordem estrita "$<$", **apenas uma** das duas afirmações será válida: $x < y$ ou $y < x$. Note, também, que a propriedade A10.1 não é válida para a ordem estrita, pois não é verdade que $x < x$. Logo, apenas as propriedades A10.2, A10.3, A11 e A12 valem para "$<$".

O mesmo pode ser dito para "$>$".

Exercício 8

Demonstre que a seguinte afirmação vale para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

Demonstração:

Exercício 8

Demonstre que a seguinte afirmação vale para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

Demonstração: Precisamos demonstrar:

1. $a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -a$

2. $0 \leq -a \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

Exercício 8

Demonstre que a seguinte afirmação vale para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

Demonstração: Precisamos demonstrar:

1. $a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -a$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq 0$.

2. $0 \leq -a \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

Exercício 8

Demonstre que a seguinte afirmação vale para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

Demonstração: Precisamos demonstrar:

1. $a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -a$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq 0$. Pela propriedade A11, vale $a + (-a) \leq 0 + (-a)$,

2. $0 \leq -a \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

Exercício 8

Demonstre que a seguinte afirmação vale para todo $a \in \mathbb{R}$*:*

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

Demonstração: Precisamos demonstrar:

1. $a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -a$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq 0$. Pela propriedade A11, vale $a + (-a) \leq 0 + (-a)$, ou seja, $0 \leq -a$.

2. $0 \leq -a \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

Exercício 8

Demonstre que a seguinte afirmação vale para todo $a \in \mathbb{R}$*:*

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

Demonstração: Precisamos demonstrar:

1. $a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -a$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq 0$. Pela propriedade A11, vale $a + (-a) \leq 0 + (-a)$, ou seja, $0 \leq -a$.

2. $0 \leq -a \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq -a$.

Exercício 8

Demonstre que a seguinte afirmação vale para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

Demonstração: Precisamos demonstrar:

1. $a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -a$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq 0$. Pela propriedade A11, vale $a + (-a) \leq 0 + (-a)$, ou seja, $0 \leq -a$.

2. $0 \leq -a \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq -a$. Pela propriedade A11, vale $a + 0 \leq a + (-a)$,

Exercício 8

Demonstre que a seguinte afirmação vale para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

Demonstração: Precisamos demonstrar:

1. $a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -a$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq 0$. Pela propriedade A11, vale $a + (-a) \leq 0 + (-a)$, ou seja, $0 \leq -a$.

2. $0 \leq -a \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq -a$. Pela propriedade A11, vale $a + 0 \leq a + (-a)$, ou seja, $a \leq 0$. ■

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Demonstre que, se* $a \leq b$ *e* $c \leq 0$, *então* $ac \geq bc$.

Demonstração:

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Demonstre que, se* $a \leq b$ *e* $c \leq 0$, *então* $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$.

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que, se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$,

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que, se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$, portanto:

$$a \leq b \qquad \text{(hipótese)}$$

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que, se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$, portanto:

$$a \leq b \qquad \text{(hipótese)}$$

$$a(-c) \leq b(-c) \qquad \text{(propr. A12)}$$

Os reais são um corpo ordenado: consequências

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que, se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$, portanto:

$$a \leq b \qquad \text{(hipótese)}$$

$$a(-c) \leq b(-c) \qquad \text{(propr. A12)}$$

$$-(ac) \leq -(bc) \qquad \text{(exercício 6 desta aula)}$$

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Demonstre que, se* $a \leq b$ *e* $c \leq 0$, *então* $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$, portanto:

$$\begin{aligned} a &\leq b && \text{(hipótese)} \\ a(-c) &\leq b(-c) && \text{(propr. A12)} \\ -(ac) &\leq -(bc) && \text{(exercício 6 desta aula)} \\ -(ac) + (ac) &\leq -(bc) + (ac) && \text{(propr. A11)} \end{aligned}$$

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que, se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$, portanto:

$$
\begin{aligned}
a &\leq b && \text{(hipótese)} \\
a(-c) &\leq b(-c) && \text{(propr. A12)} \\
-(ac) &\leq -(bc) && \text{(exercício 6 desta aula)} \\
-(ac) + (ac) &\leq -(bc) + (ac) && \text{(propr. A11)} \\
0 &\leq -(bc) + (ac) && \text{(propr. A4, soma com oposto)}
\end{aligned}
$$

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que, se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$, portanto:

$$
\begin{aligned}
a &\leq b && \text{(hipótese)}\\
a(-c) &\leq b(-c) && \text{(propr. A12)}\\
-(ac) &\leq -(bc) && \text{(exercício 6 desta aula)}\\
-(ac) + (ac) &\leq -(bc) + (ac) && \text{(propr. A11)}\\
0 &\leq -(bc) + (ac) && \text{(propr. A4, soma com oposto)}\\
bc + 0 &\leq bc + (-(bc)) + (ac) && \text{(propr. A11)}
\end{aligned}
$$

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que, se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$, portanto:

$$
\begin{aligned}
a &\leq b && \text{(hipótese)} \\
a(-c) &\leq b(-c) && \text{(propr. A12)} \\
-(ac) &\leq -(bc) && \text{(exercício 6 desta aula)} \\
-(ac) + (ac) &\leq -(bc) + (ac) && \text{(propr. A11)} \\
0 &\leq -(bc) + (ac) && \text{(propr. A4, soma com oposto)} \\
bc + 0 &\leq bc + (-(bc)) + (ac) && \text{(propr. A11)} \\
bc &\leq ac && \text{(propr. A3 e A4)}
\end{aligned}
$$

Exercício 9

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que, se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos como hipótese: $a \leq b$ e $c \leq 0$. Pelo exercício 8, $c \leq 0$ implica $0 \leq -c$, portanto:

$$
\begin{aligned}
a &\leq b && \text{(hipótese)} \\
a(-c) &\leq b(-c) && \text{(propr. A12)} \\
-(ac) &\leq -(bc) && \text{(exercício 6 desta aula)} \\
-(ac)+(ac) &\leq -(bc)+(ac) && \text{(propr. A11)} \\
0 &\leq -(bc)+(ac) && \text{(propr. A4, soma com oposto)} \\
bc+0 &\leq bc+(-(bc))+(ac) && \text{(propr. A11)} \\
bc &\leq ac && \text{(propr. A3 e A4)}
\end{aligned}
$$

A última linha equivale à afirmação $ac \geq bc$. ■

As seguintes definições são equivalentes.

Definições de um número real

As seguintes definições são equivalentes.

Definição (por representação decimal)

O conjunto $\mathbb{R}$ *é aquele tal que todo elemento* $x \in \mathbb{R}$ *possui representação decimal (seja ela finita, infinita periódica ou infinita não-periódica) com sinal.*

Definições de um número real

As seguintes definições são equivalentes.

Definição (por representação decimal)

O conjunto $\mathbb{R}$ é aquele tal que todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui representação decimal (seja ela finita, infinita periódica ou infinita não-periódica) com sinal.

Definição (por sequências)

O conjunto $\mathbb{R}$ é aquele tal que todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui uma sequência de números racionais que converge para esse número.

Definições de um número real

As seguintes definições são equivalentes.

Definição (por representação decimal)

O conjunto $\mathbb{R}$ é aquele tal que todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui representação decimal (seja ela finita, infinita periódica ou infinita não-periódica) com sinal.

Definição (por sequências)

O conjunto $\mathbb{R}$ é aquele tal que todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui uma sequência de números racionais que converge para esse número.

Definição (definição axiomática)

O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo, que possui uma relação de ordem total "$\leq$", e satisfaz o axioma de completude.

Definições de um número real

As seguintes definições são equivalentes.

Definição (por representação decimal)

O conjunto $\mathbb{R}$ é aquele tal que todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui representação decimal (seja ela finita, infinita periódica ou infinita não-periódica) com sinal.

Definição (por sequências)

O conjunto $\mathbb{R}$ é aquele tal que todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui uma sequência de números racionais que converge para esse número.

Definição (definição axiomática)

O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo, que possui uma relação de ordem total "$\leq$", e satisfaz o axioma de completude.

Há mais uma definição equivalente: a **definição geométrica pela reta real**.

Definição geométrica dos números reais

Definição (definição geométrica dos reais)

O conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos de uma linha reta (que se estende indefinidamente para ambos os lados).

Como esta definição se relaciona com as outras?

Definição geométrica dos números reais

Definição (definição geométrica dos reais)

O conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos de uma linha reta (que se estende indefinidamente para ambos os lados).

Como esta definição se relaciona com as outras? Dado um ponto sobre uma reta, como obter a sua representação decimal, por exemplo?

Definição (definição geométrica dos reais)

O conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos de uma linha reta (que se estende indefinidamente para ambos os lados).

Como esta definição se relaciona com as outras? Dado um ponto sobre uma reta, como obter a sua representação decimal, por exemplo? Como são as operações de soma, multiplicação e a relação "menor ou igual"?

Definição (definição geométrica dos reais)

O conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos de uma linha reta (que se estende indefinidamente para ambos os lados).

Como esta definição se relaciona com as outras? Dado um ponto sobre uma reta, como obter a sua representação decimal, por exemplo? Como são as operações de soma, multiplicação e a relação "menor ou igual"?

Dada uma reta, precisaremos do seguinte:

- Escolher um **ponto de origem**, o qual notaremos por O (letra "O")

Definição (definição geométrica dos reais)

O conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos de uma linha reta (que se estende indefinidamente para ambos os lados).

Como esta definição se relaciona com as outras? Dado um ponto sobre uma reta, como obter a sua representação decimal, por exemplo? Como são as operações de soma, multiplicação e a relação "menor ou igual"?

Dada uma reta, precisaremos do seguinte:

- Escolher um **ponto de origem**, o qual notaremos por O (letra "O")
- Marcar um segmento com um extremo em O e outro extremo em um ponto A qualquer da reta. O segmento $\overline{OA}$ é chamado **segmento unitário**.

Definição (definição geométrica dos reais)

O conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos de uma linha reta (que se estende indefinidamente para ambos os lados).

Como esta definição se relaciona com as outras? Dado um ponto sobre uma reta, como obter a sua representação decimal, por exemplo? Como são as operações de soma, multiplicação e a relação "menor ou igual"?

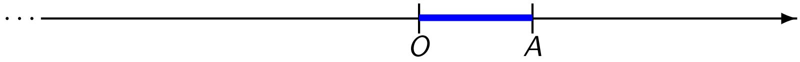
Dada uma reta, precisaremos do seguinte:

- Escolher um **ponto de origem**, o qual notaremos por O (letra "O")
- Marcar um segmento com um extremo em O e outro extremo em um ponto A qualquer da reta. O segmento $\overline{OA}$ é chamado **segmento unitário**.

Par simplificar, consideraremos que a reta é horizontal e que o ponto A está à direita de O.

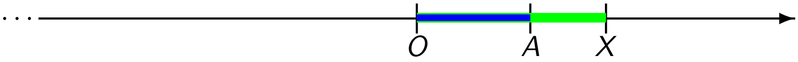
A reta real

Uma reta com um ponto de origem O e um segmento unitário $\overline{OA}$ é chamada **reta real**.



A reta real

Uma reta com um ponto de origem O e um segmento unitário $\overline{OA}$ é chamada **reta real**.

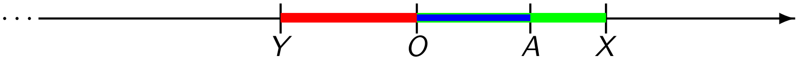


Um ponto X à direita de O é identificado com o número real positivo x tal que:

$$x = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$$

A reta real

Uma reta com um ponto de origem O e um segmento unitário $\overline{OA}$ é chamada **reta real**.



Um ponto X à direita de O é identificado com o número real positivo x tal que:

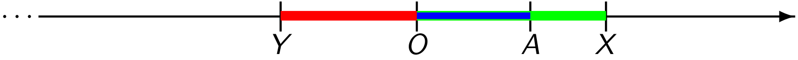
$$x = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$$

Um ponto Y à esquerda de O é identificado com o número real negativo y tal que:

$$y = -\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}}$$

A reta real

Uma reta com um ponto de origem O e um segmento unitário $\overline{OA}$ é chamada **reta real**.



Um ponto X à direita de O é identificado com o número real positivo x tal que:

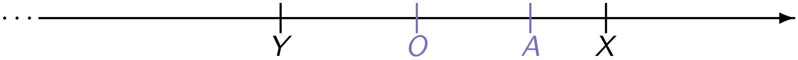
$$x = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$$

Um ponto Y à esquerda de O é identificado com o número real negativo y tal que:

$$y = -\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}}$$

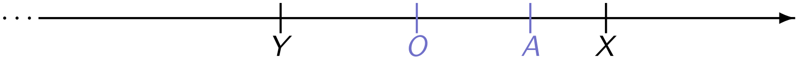
Em particular, podemos identificar o ponto O com o 0 (zero), e o ponto A com o 1 (um).

A reta real: relação de ordem e operações



Relação de ordem: dizemos que $y \leq x$ se o ponto Y está à esquerda de X ou se $Y = X$.

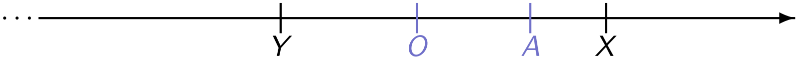
A reta real: relação de ordem e operações



Relação de ordem: dizemos que $y \leq x$ se o ponto Y está à esquerda de X ou se $Y = X$.

Em particular, diremos que x é **positivo** se X está à direita de O e que y é **negativo** se Y está à esquerda de O

A reta real: relação de ordem e operações

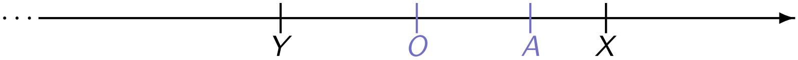


Relação de ordem: dizemos que $y \leq x$ se o ponto Y está à esquerda de X ou se $Y = X$.

Em particular, diremos que x é **positivo** se X está à direita de O e que y é **negativo** se Y está à esquerda de O

A **operação de soma** também pode ser definida facilmente em termos de somas de comprimentos de segmentos (com o devido cuidado com pontos à esquerda da origem).

A reta real: relação de ordem e operações



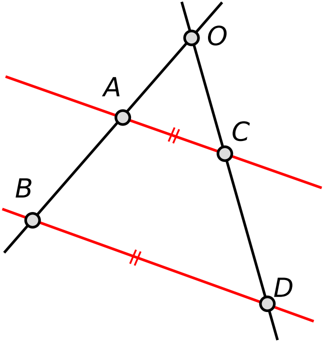
Relação de ordem: dizemos que $y \leq x$ se o ponto Y está à esquerda de X ou se $Y = X$.

Em particular, diremos que x é **positivo** se X está à direita de O e que y é **negativo** se Y está à esquerda de O

A **operação de soma** também pode ser definida facilmente em termos de somas de comprimentos de segmentos (com o devido cuidado com pontos à esquerda da origem).

A **operação de multiplicação** é baseada num teorema de Tales de Mileto sobre construções que dividem segmentos em partes iguais.

Teorema: Para qualquer construção na forma abaixo, tais que as retas de cor vermelha sejam paralelas:



temos que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$.

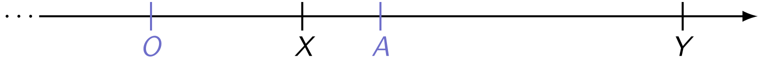
Demonstração: Use semelhança de triângulos.

Caso (1) X e Y estão à direita de O.

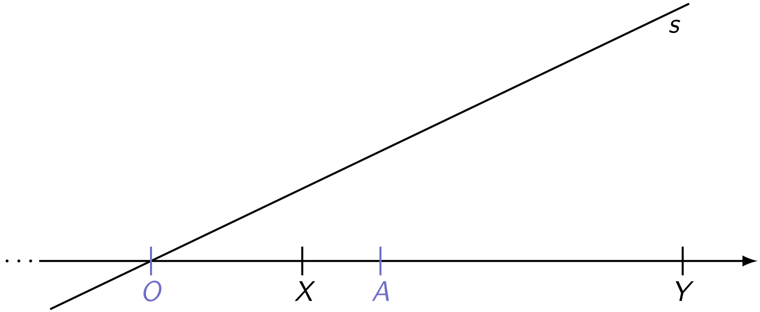
Caso (1) X e Y estão à direita de O.

- 1. trace uma reta s intersectando a reta real no ponto O
- 2. construa o ponto Y' sobre s tal que $\overline{OY'}$ e $\overline{OY}$ tenham o mesmo comprimento
- 3. construa o ponto A' sobre s tal que $\overline{OA'}$ e $\overline{OA}$ tenham o mesmo comprimento
- 4. trace a reta t passando pelos pontos X e A'
- 5. trace a reta u, paralela a t, passando por Y'
- 6. seja P o ponto onde u intersecta a reta real.

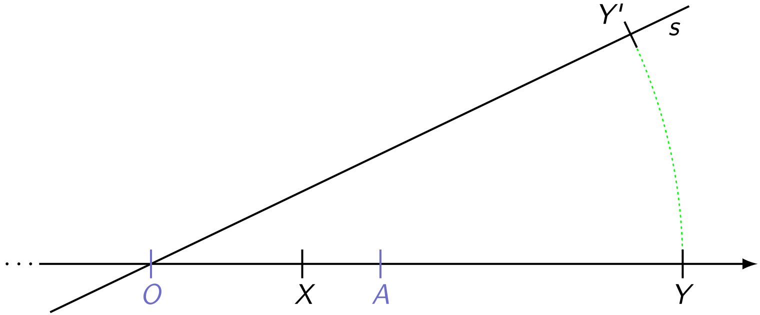
Multiplicação na reta real



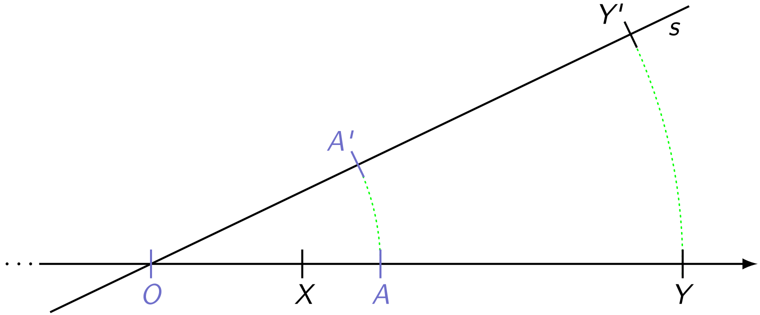
1. trace uma reta s intersectando a reta real no ponto O



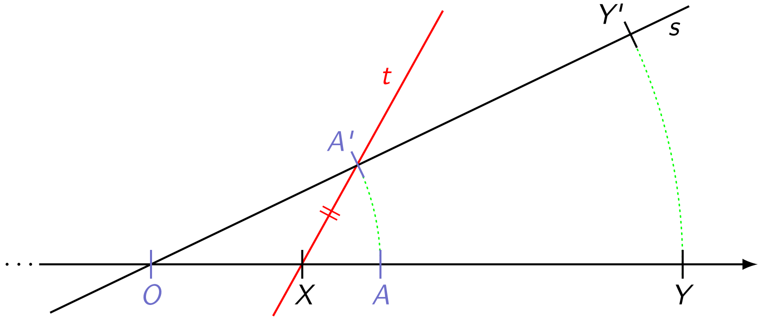
1. trace uma reta s intersectando a reta real no ponto O



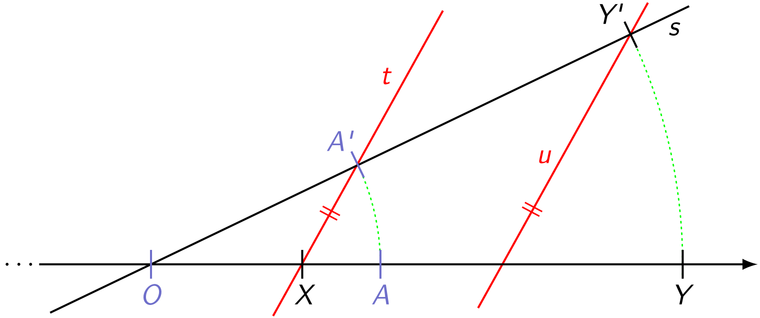
2. construa o ponto Y' sobre s tal que $\overline{OY'}$ e $\overline{OY}$ tenham o mesmo comprimento



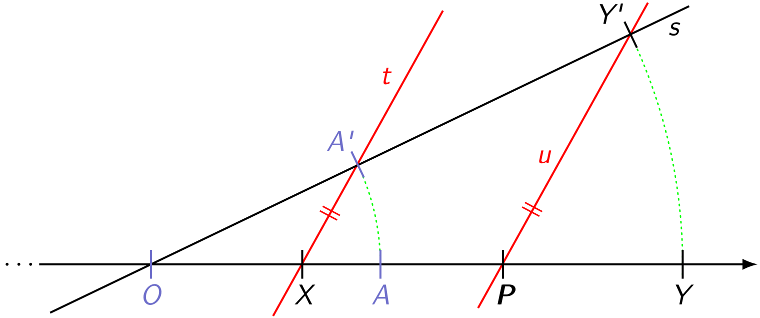
3. construa o ponto A' sobre s tal que $\overline{OA'}$ e $\overline{OA}$ tenham o mesmo comprimento



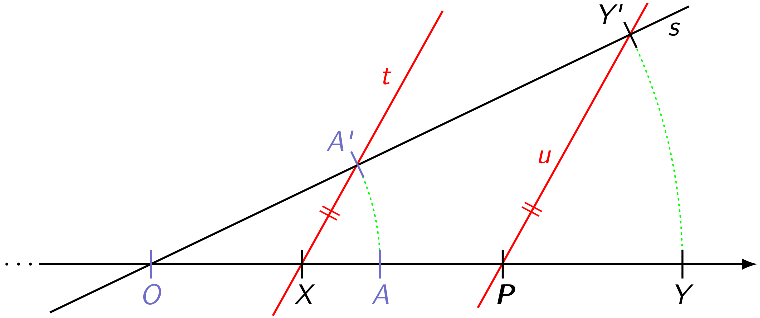
4. trace a reta t passando pelos pontos X e A'



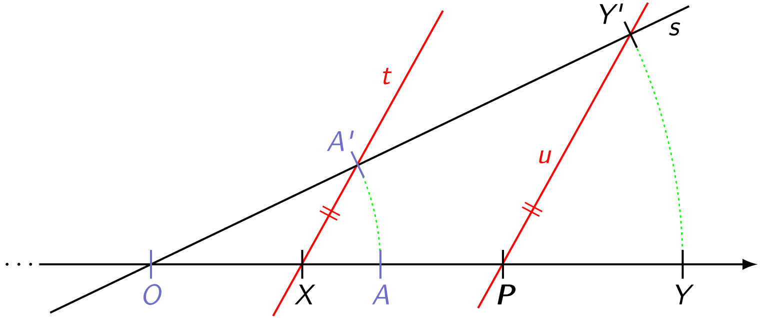
5. trace a reta u, paralela a t, passando por Y'



6. seja P o ponto onde u intersecta a reta real.

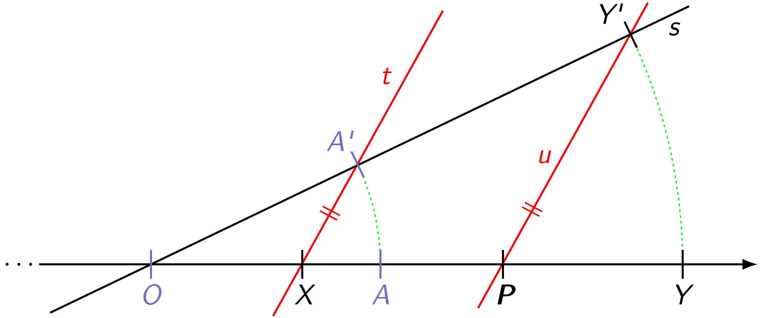


Teorema de Tales: $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OY'}}$



Teorema de Tales: $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OY'}}$, que equivale a $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OY}}$

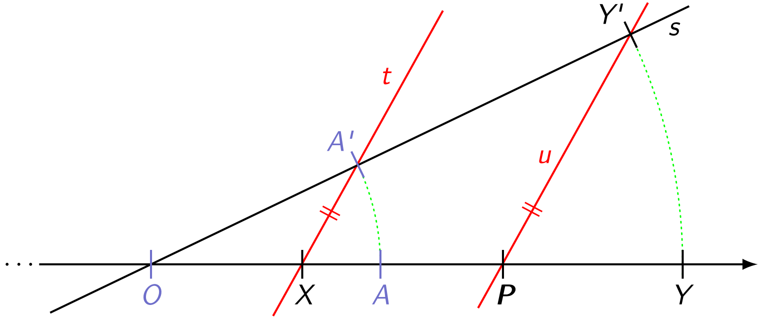
Multiplicação na reta real



Teorema de Tales: $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OY'}}$, que equivale a $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OY}}$, logo:

$$\frac{\overline{OX} \cdot \overline{OY}}{\overline{OA}} = \overline{OP}$$

Multiplicação na reta real



Teorema de Tales: $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OY'}}$, que equivale a $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OY}}$, logo:

$$\frac{\overline{OX} \cdot \overline{OY}}{\overline{OA}} = \overline{OP}$$

Em casa, fazer os casos: (2) X à esquerda de O, Y à direita; (3) X à direita de O, Y à esquerda; e (4) X e Y à esquerda de O.