Bases Matemáticas

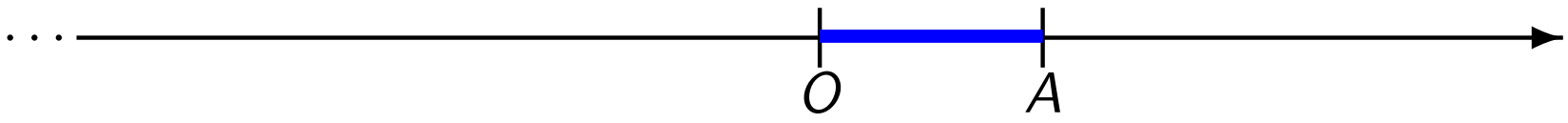
Aula 8 – Números Reais: módulo ou valor absoluto, raízes, intervalos

Rodrigo Hausen

10 de outubro de 2012

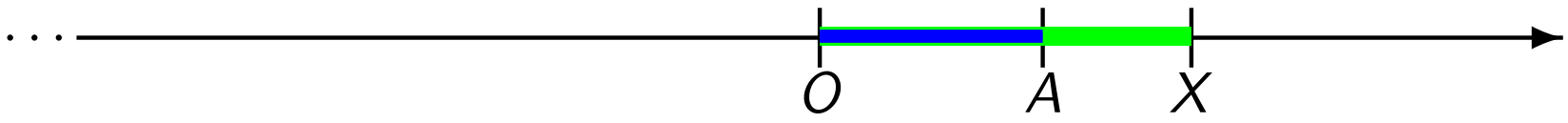
Relembrando: representação geométrica para os reais

Uma reta com um ponto de origem O e um segmento unitário $\overline{OA}$ é chamada **reta real**.



Relembrando: representação geométrica para os reais

Uma reta com um ponto de origem O e um segmento unitário $\overline{OA}$ é chamada **reta real**.

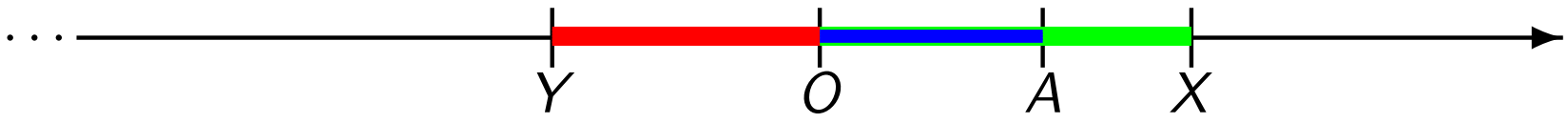


Um ponto X à direita de O é identificado com o número real positivo x tal que:

$$x = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$$

Relembrando: representação geométrica para os reais

Uma reta com um ponto de origem O e um segmento unitário $\overline{OA}$ é chamada **reta real**.



Um ponto X à direita de O é identificado com o número real positivo x tal que:

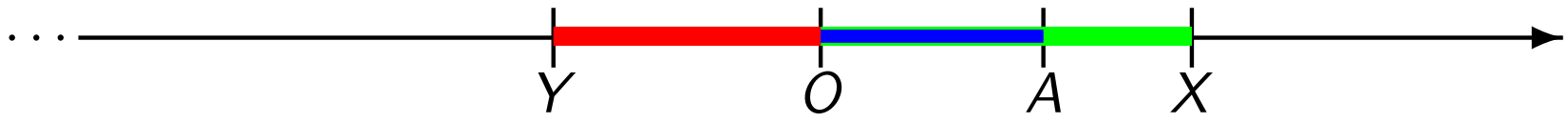
$$x = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$$

Um ponto Y à esquerda de O é identificado com o número real negativo y tal que:

$$y = -\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}}$$

Relembrando: representação geométrica para os reais

Uma reta com um ponto de origem O e um segmento unitário $\overline{OA}$ é chamada **reta real**.



Um ponto X à direita de O é identificado com o número real positivo x tal que:

$$x = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$$

Um ponto Y à esquerda de O é identificado com o número real negativo y tal que:

$$y = -\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}}$$

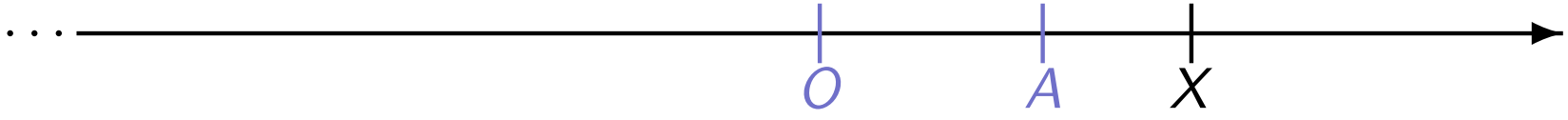
Em particular, podemos identificar o ponto O com o 0 (zero), e o ponto A com o 1 (um).

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto – definição geométrica)

O ***valor absoluto****, ou* ***módulo****, de um número real x é a razão* $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$ *onde X é o ponto que corresponde ao número x na reta real.*

Usaremos a notação $|x|$ para o valor absoluto.

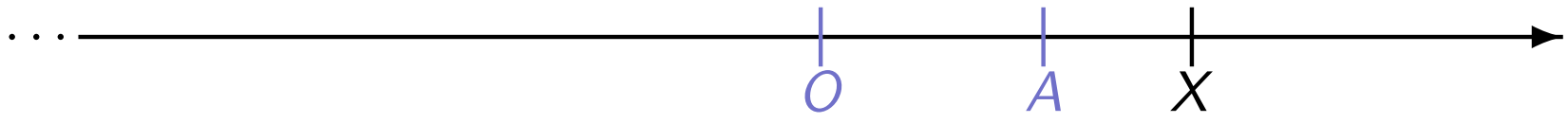


Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto – definição geométrica)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é a razão $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$ onde X é o ponto que corresponde ao número x na reta real.*

Usaremos a notação $|x|$ para o valor absoluto.



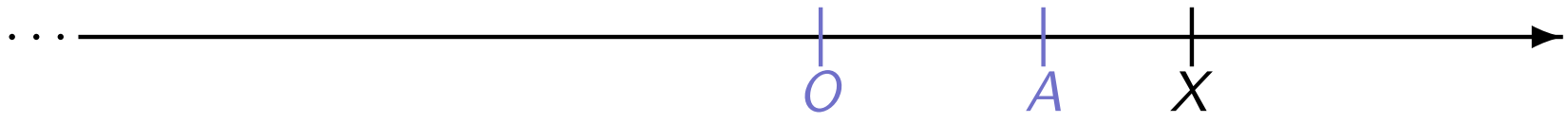
Se $x \geq 0$, então $|x| = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}} =$

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto – definição geométrica)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é a razão $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$ onde X é o ponto que corresponde ao número x na reta real.*

Usaremos a notação $|x|$ para o valor absoluto.



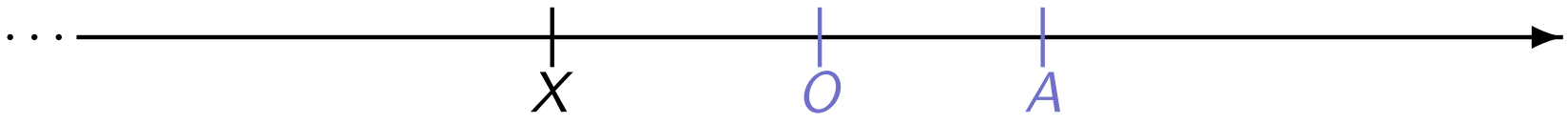
Se $x \geq 0$, então $|x| = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}} = x$.

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto – definição geométrica)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é a razão $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$ onde X é o ponto que corresponde ao número x na reta real.*

Usaremos a notação $|x|$ para o valor absoluto.



Se $x \geq 0$, então $|x| = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}} = x$.

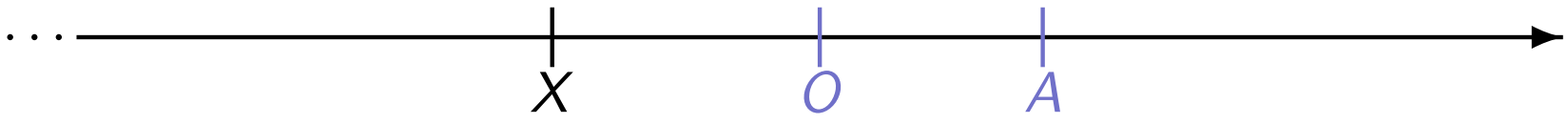
Se $x < 0$, então $|x| = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}} =$

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto – definição geométrica)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é a razão $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$ onde X é o ponto que corresponde ao número x na reta real.*

Usaremos a notação $|x|$ para o valor absoluto.



Se $x \geq 0$, então $|x| = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}} = x$.

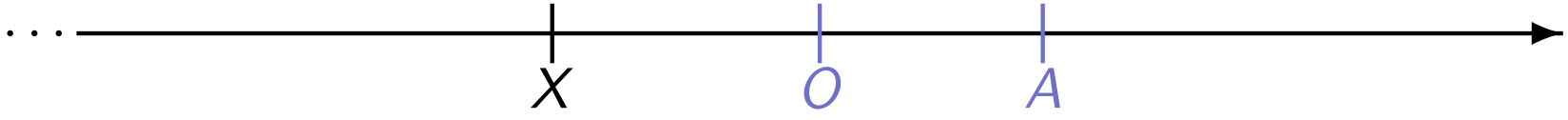
Se $x < 0$, então $|x| = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}} = -\left(-\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}}\right) =$

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto – definição geométrica)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é a razão $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}}$ onde X é o ponto que corresponde ao número x na reta real.*

Usaremos a notação $|x|$ para o valor absoluto.



Se $x \geq 0$, então $|x| = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}} = x$.

Se $x < 0$, então $|x| = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}} = -\left(-\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA}}\right) = -x$.

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto)

O ***valor absoluto****, ou* ***módulo****, de um número real x é denotado por $|x|$ e definido por*

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0. \end{cases}$$

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é denotado por $|x|$ e definido por*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Primeira propriedade do valor absoluto: $|x| \geq 0$.

(consequência direta da definição)

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é denotado por $|x|$ e definido por*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Primeira propriedade do valor absoluto: $|x| \geq 0$.

(consequência direta da definição)

Cuidado: Qual é o valor absoluto de $+x$? E de $-x$?

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é denotado por $|x|$ e definido por*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Primeira propriedade do valor absoluto: $|x| \geq 0$.

(consequência direta da definição)

Cuidado: Qual é o valor absoluto de $+x$? E de $-x$?

Podemos ser tentados a pensar que ambos são iguais a x pelo engano de se dizer que "o módulo é apenas o número sem sinal".

Valor absoluto de um número real

Definição (valor absoluto)

*O **valor absoluto**, ou **módulo**, de um número real x é denotado por $|x|$ e definido por*

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0. \end{cases}$$

Primeira propriedade do valor absoluto: $|x| \geq 0$.

(consequência direta da definição)

Cuidado: Qual é o valor absoluto de $+x$? E de $-x$?

Podemos ser tentados a pensar que ambos são iguais a x pelo engano de se dizer que "~~o módulo é apenas o número sem sinal~~". Isto não é verdade! Use **sempre** a definição: só podemos dizer que $|+x| = |x|$ e $|-x| = |x|$, mas ainda assim precisamos tratar separadamente os casos $x \geq 0$ e $x < 0$!

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução:

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução: Consideramos as duas possibilidades para $x+1$: ou $x+1 \geq 0$, ou $x+1 < 0$.

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução: Consideramos as duas possibilidades para $x+1$: ou $x+1 \geq 0$, ou $x+1 < 0$.
No caso $x+1 \geq 0$ temos: $|x+1| = x+1$

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução: Consideramos as duas possibilidades para $x+1$: ou $x+1 \geq 0$, ou $x+1 < 0$.
No caso $x+1 \geq 0$ temos: $|x+1| = x+1 = 3$, ou seja, $x = 3-1$

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução: Consideramos as duas possibilidades para $x+1$: ou $x+1 \geq 0$, ou $x+1 < 0$.
No caso $x+1 \geq 0$ temos: $|x+1| = x+1 = 3$, ou seja, $x = 3-1 = 2$.

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução: Consideramos as duas possibilidades para $x+1$: ou $x+1 \geq 0$, ou $x+1 < 0$.
No caso $x+1 \geq 0$ temos: $|x+1| = x+1 = 3$, ou seja, $x = 3-1 = 2$.
No caso $x+1 < 0$ temos: $|x+1| = -(x+1)$

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução: Consideramos as duas possibilidades para $x+1$: ou $x+1 \geq 0$, ou $x+1 < 0$.
No caso $x+1 \geq 0$ temos: $|x+1| = x+1 = 3$, ou seja, $x = 3-1 = 2$.
No caso $x+1 < 0$ temos: $|x+1| = -(x+1) = 3$, ou seja, $-x-1 = 3$,

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução: Consideramos as duas possibilidades para $x+1$: ou $x+1 \geq 0$, ou $x+1 < 0$.
No caso $x+1 \geq 0$ temos: $|x+1| = x+1 = 3$, ou seja, $x = 3-1 = 2$.
No caso $x+1 < 0$ temos: $|x+1| = -(x+1) = 3$, ou seja, $-x-1 = 3$, portanto $x = -4$.

Exercício 1

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+1| = 3$$

Solução: Consideramos as duas possibilidades para $x+1$: ou $x+1 \geq 0$, ou $x+1 < 0$.
No caso $x+1 \geq 0$ temos: $|x+1| = x+1 = 3$, ou seja, $x = 3-1 = 2$.
No caso $x+1 < 0$ temos: $|x+1| = -(x+1) = 3$, ou seja, $-x-1 = 3$, portanto $x = -4$.
Conclusão: x só pode ser 2 ou -4. ■

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução:

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2$

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$,

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2)$

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2) \leq 2x+3$,

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2) \leq 2x+3$, logo

$$-x-2 \quad \leq \quad 2x+3$$

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2) \leq 2x+3$, logo

$$\begin{aligned} -x-2 &\leq 2x+3 \\ -2-3 &\leq 2x+x \end{aligned}$$

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2) \leq 2x+3$, logo

$$\begin{aligned} -x-2 &\leq 2x+3 \\ -2-3 &\leq 2x+x \\ -5 &\leq 3x \end{aligned}$$

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2) \leq 2x+3$, logo

$$\begin{aligned} -x-2 &\leq 2x+3 \\ -2-3 &\leq 2x+x \\ -5 &\leq 3x \\ -5/3 &\leq x \end{aligned}$$

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2) \leq 2x+3$, logo

$$\begin{aligned} -x-2 &\leq 2x+3 \\ -2-3 &\leq 2x+x \\ -5 &\leq 3x \\ -5/3 &\leq x \end{aligned}$$

Note que, neste caso, temos condições incompatíveis: $x < -2$, por hipótese, e $x \geq -5/3$, por consequência.

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2) \leq 2x+3$, logo

$$\begin{aligned} -x-2 &\leq 2x+3 \\ -2-3 &\leq 2x+x \\ -5 &\leq 3x \\ -5/3 &\leq x \end{aligned}$$

Note que, neste caso, temos condições incompatíveis: $x < -2$, por hipótese, e $x \geq -5/3$, por consequência. Não há solução neste caso!

Exercício 2

Determine todos os valores reais possíveis para x tais que

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Dois casos a considerar: ou $x+2 \geq 0$, ou $x+2 < 0$.
Se $x+2 \geq 0$, então $|x+2| = x+2 \leq 2x+3$, logo $2-3 \leq 2x-x$, ou seja, $-1 \leq x$.
Se $x+2 < 0$, então $|x+2| = -(x+2) \leq 2x+3$, logo

$$\begin{aligned} -x-2 &\leq 2x+3 \\ -2-3 &\leq 2x+x \\ -5 &\leq 3x \\ -5/3 &\leq x \end{aligned}$$

Note que, neste caso, temos condições incompatíveis: $x < -2$, por hipótese, e $x \geq -5/3$, por consequência. Não há solução neste caso!
Conclusão: as soluções para o problema são $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x\}$. ■

Valor absoluto de um número real

O exercício 11 nos traz uma lição valiosa:

Em todo problema envolvendo equações/inequações e módulo, sempre verifique se cada solução encontrada satisfaz as hipóteses de cada caso.

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- $|-x| = |x|$

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|xy| = |x||y|$

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)
- $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)
- $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$
- Se $c \geq 0$, então: $\quad |x| \leq c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq x \leq c$

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)
- $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$
- Se $c \geq 0$, então: $\quad |x| \leq c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq x \leq c$
- Se $c \geq 0$, então: $\quad |x| \geq c \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -c$ ou $x \geq c$

Raiz quadrada de número positivo

Definição 1 (raiz quadrada)

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0$. Dizemos que um número $y \in \mathbb{R}$ é ***raiz quadrada*** *de x se $y^2 = x$.*

Normalmente, denotamos a raiz quadrada positiva de x por $\sqrt{x}$.

Raiz quadrada de número positivo

Definição 1 (raiz quadrada)

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0$. Dizemos que um número $y \in \mathbb{R}$ é ***raiz quadrada*** *de x se $y^2 = x$.*

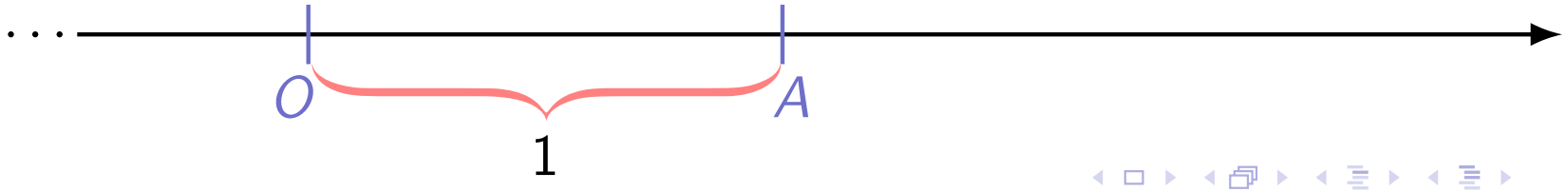
Normalmente, denotamos a raiz quadrada positiva de x por $\sqrt{x}$.

Exemplo 1

Demonstre que existe um número real y tal que $y^2 = 2$
(ou seja, demonstre que existe raiz quadrada de 2).

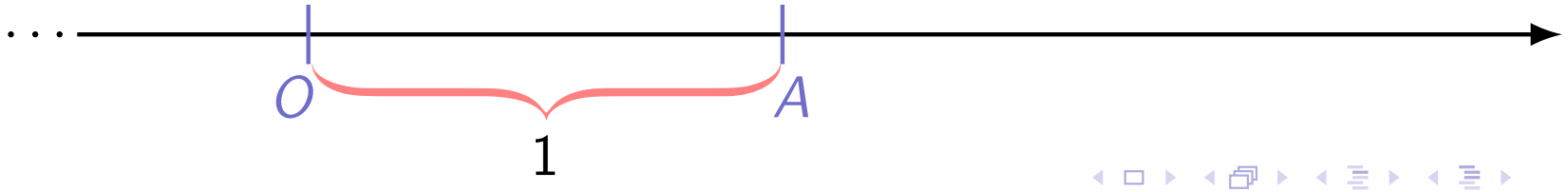
Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$.



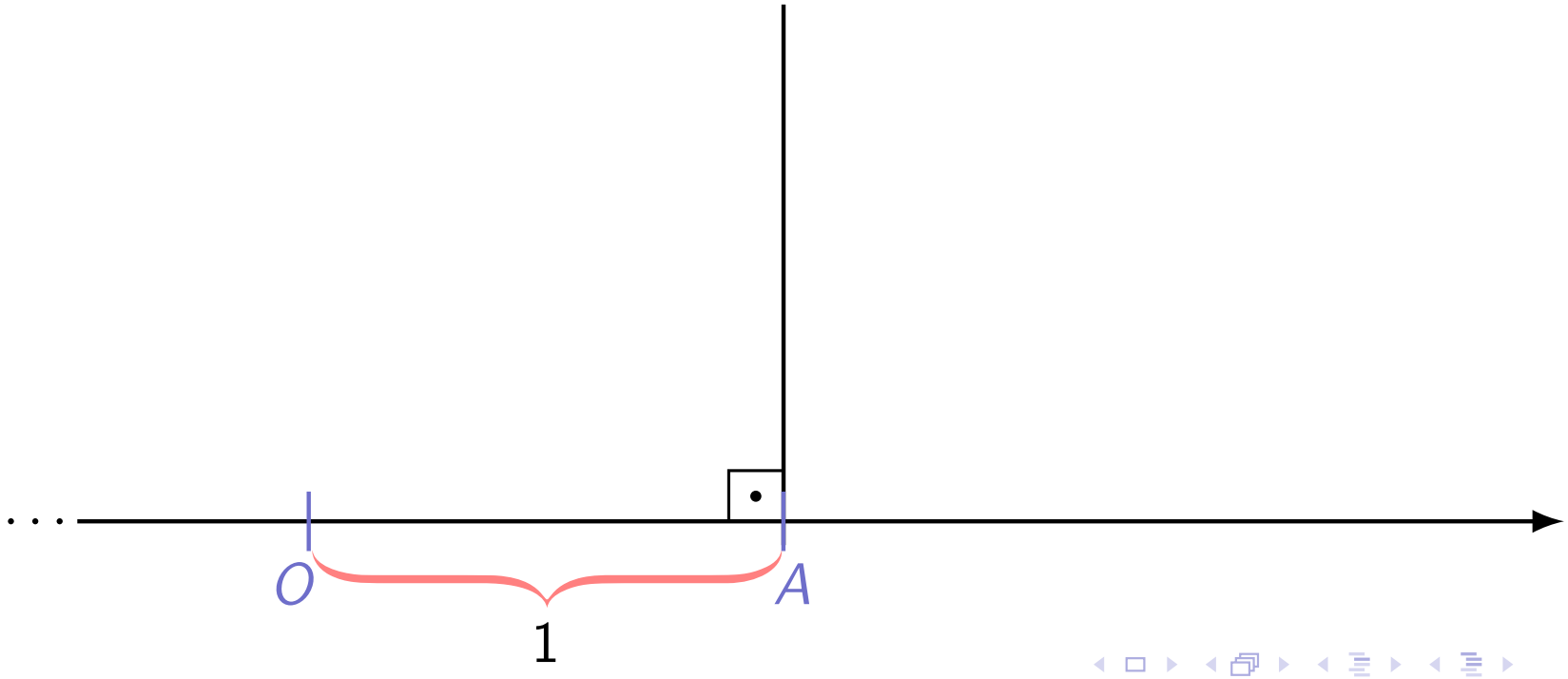
Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$.



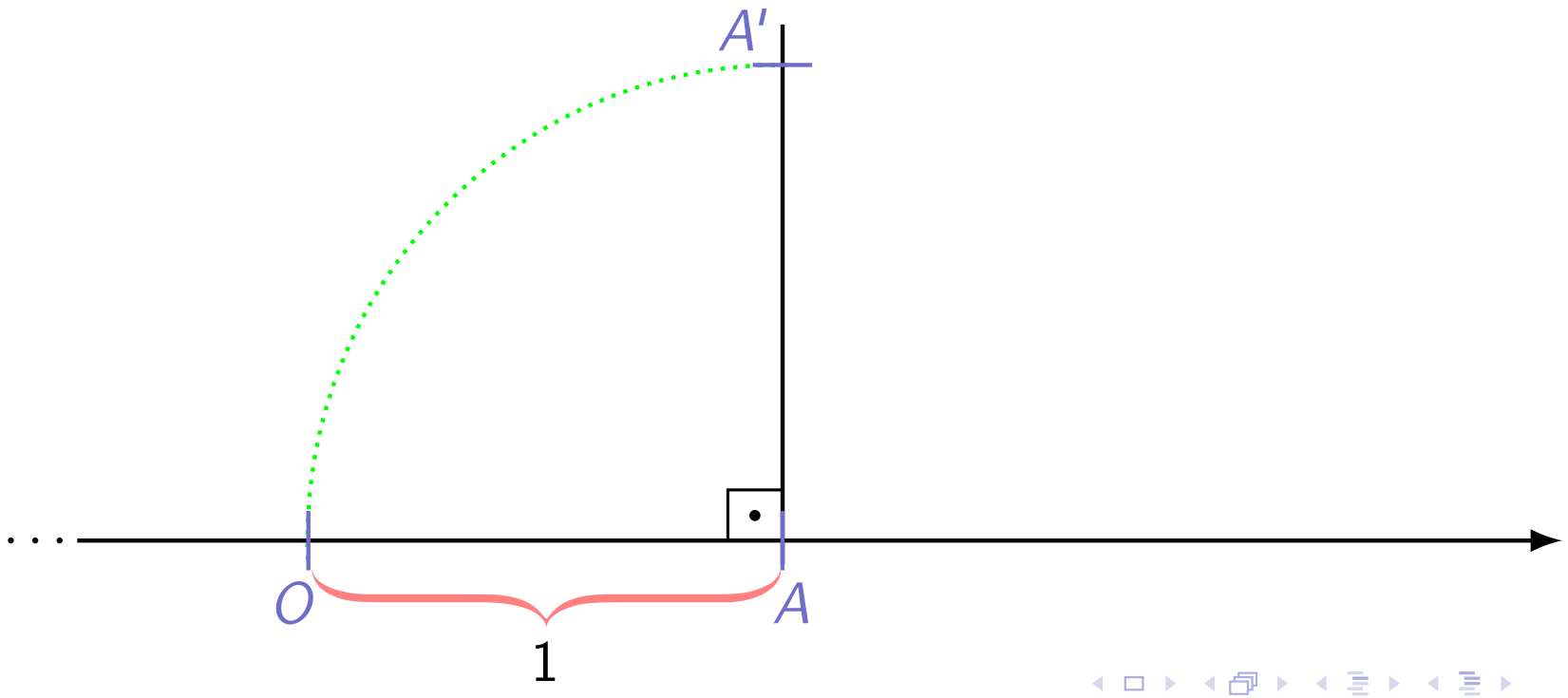
Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$.



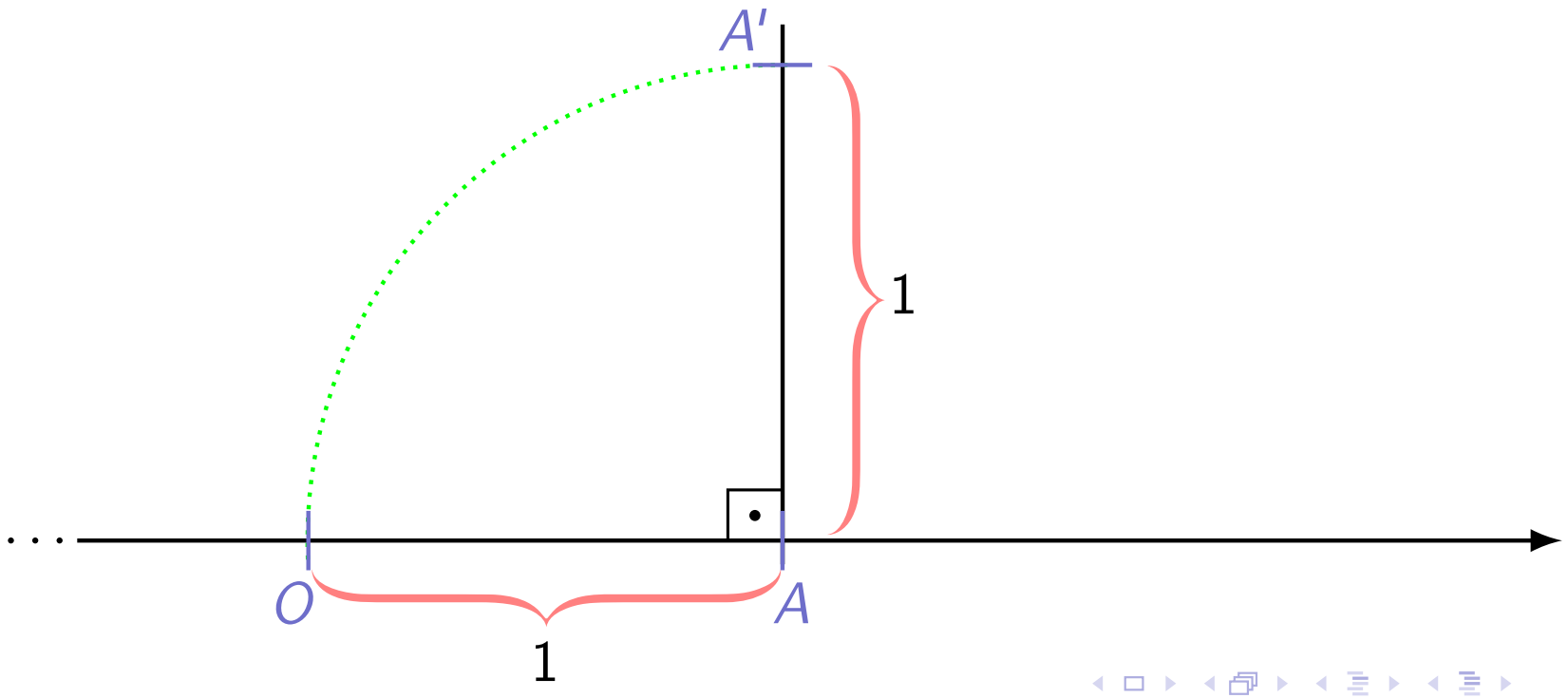
Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$.



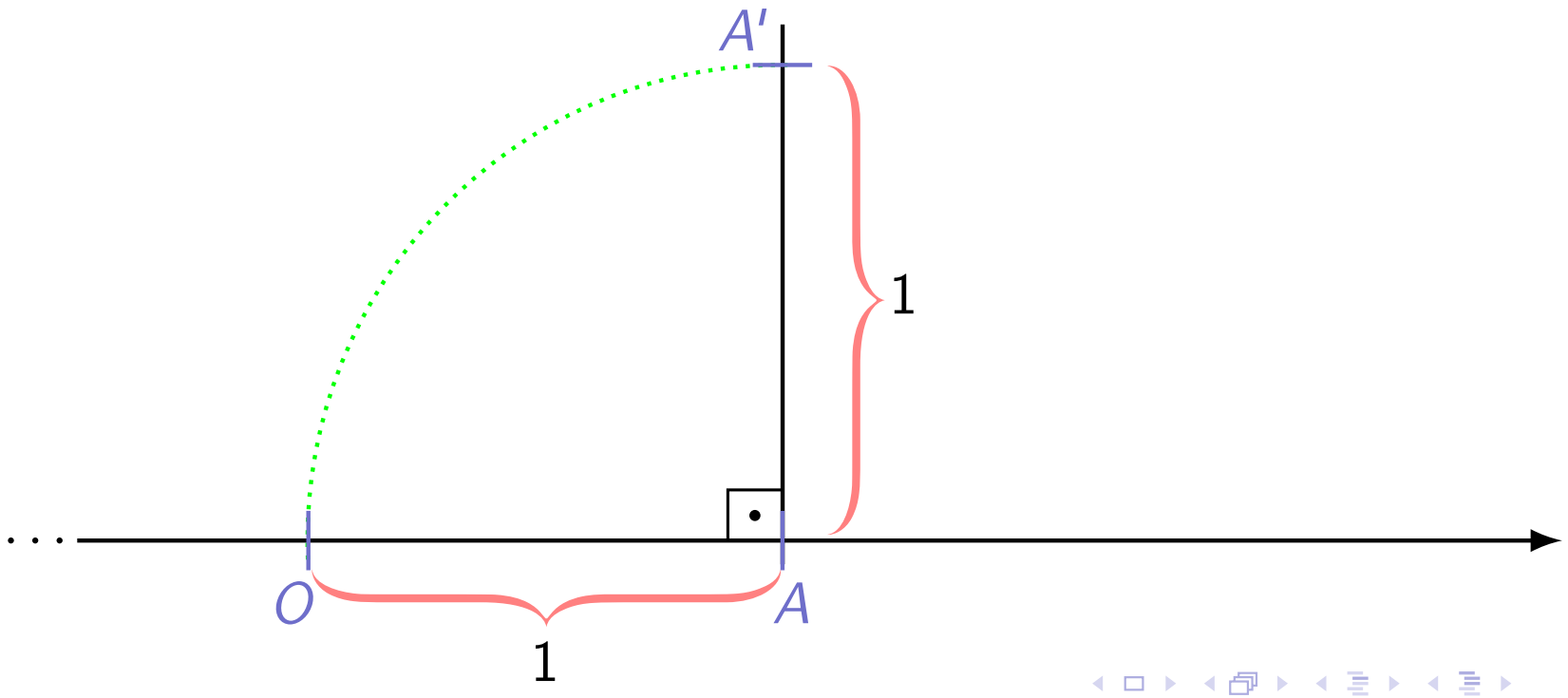
Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$.



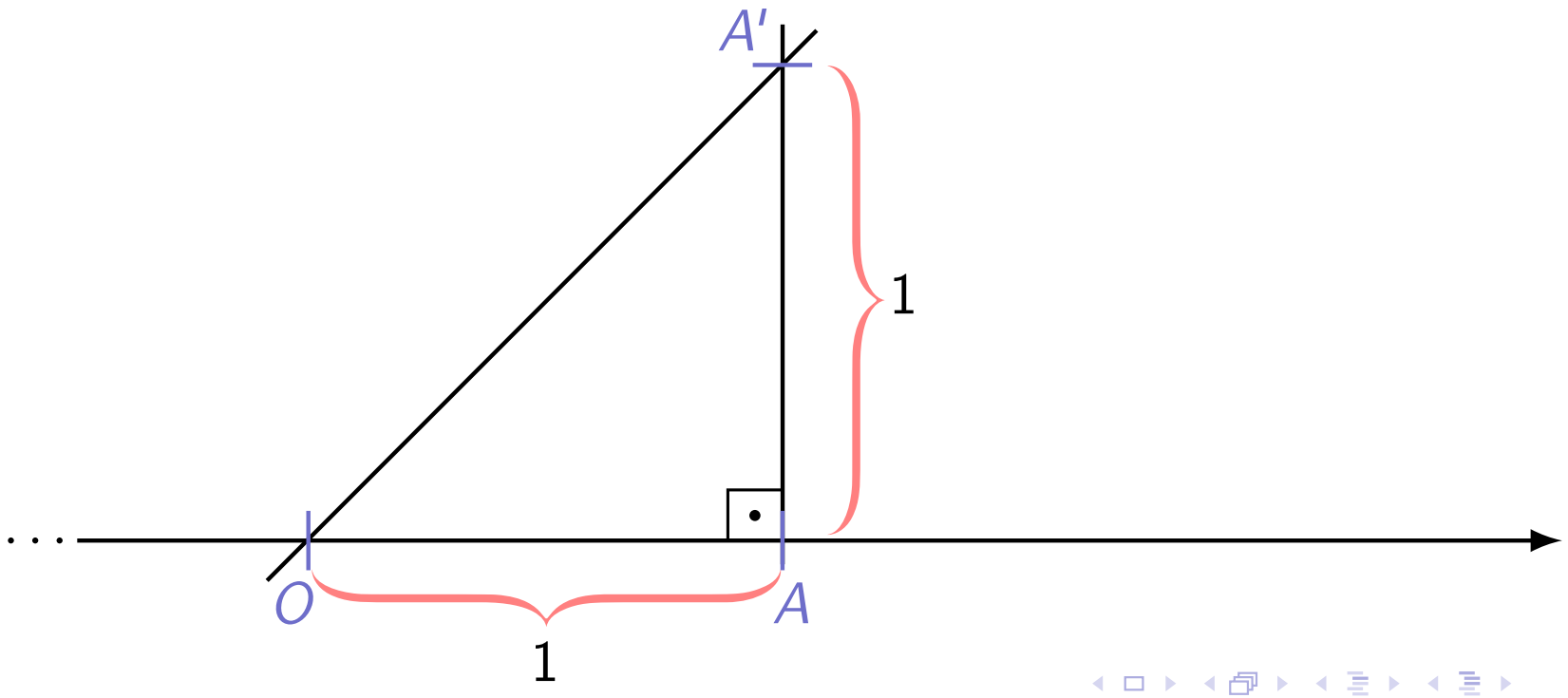
Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{OA'}$,



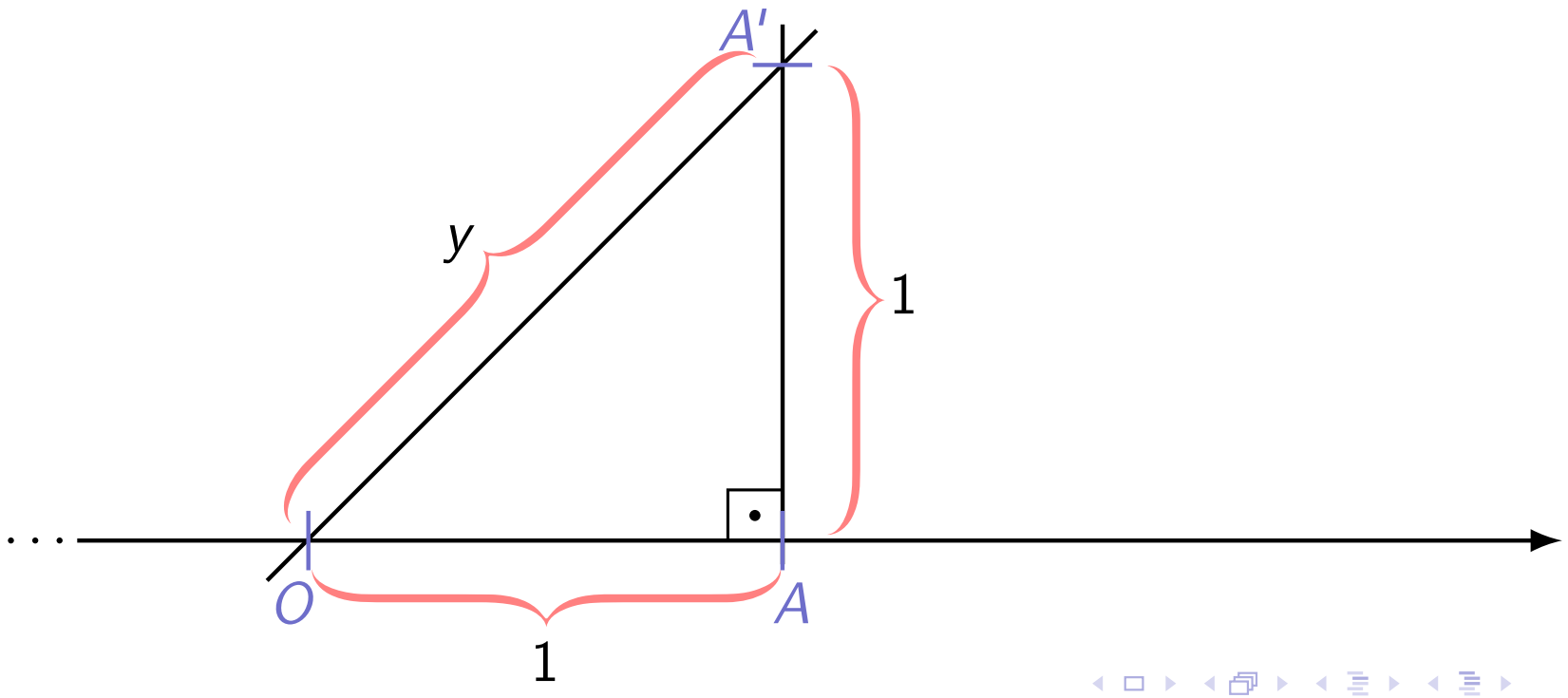
Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{OA'}$,



Existência da raiz quadrada de 2

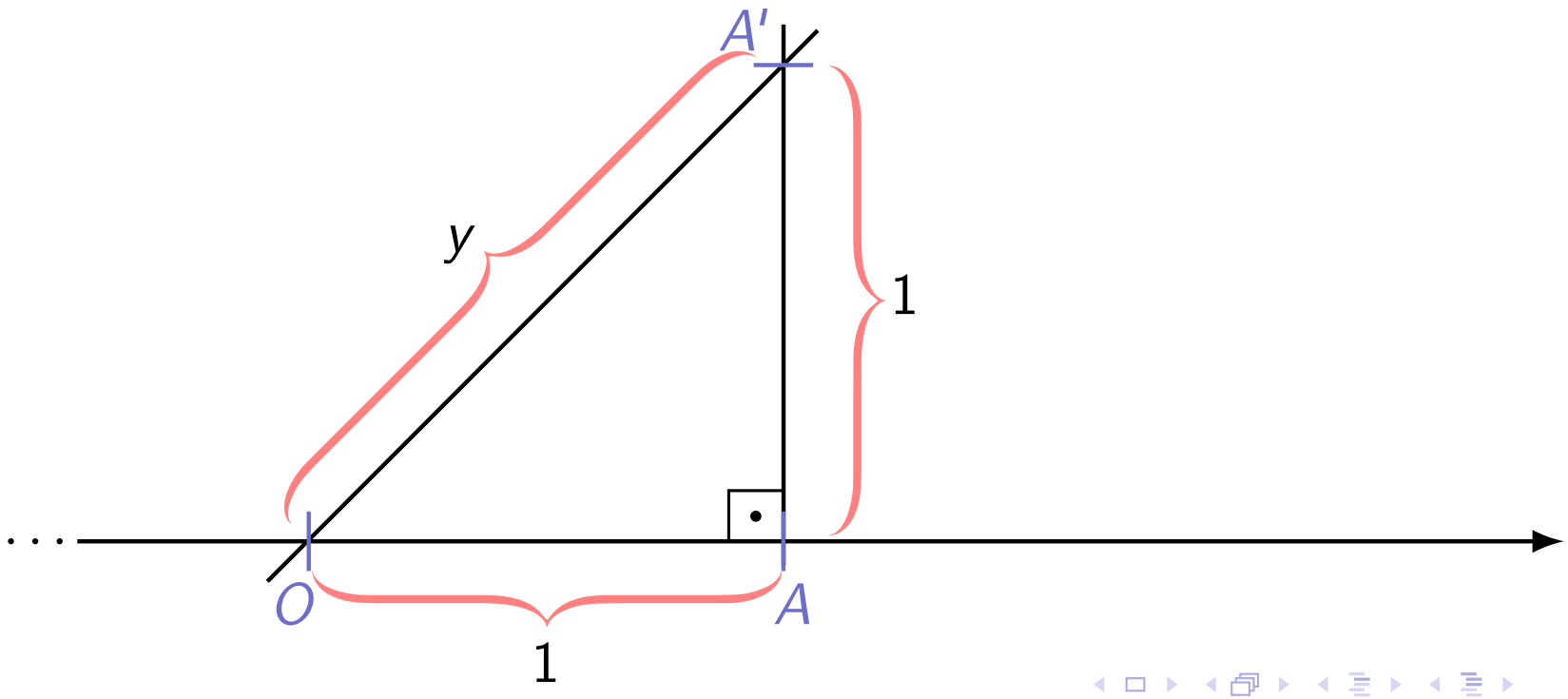
Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{OA'}$, e chame de y o comprimento $\overline{OA'}$.



Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{OA'}$, e chame de y o comprimento $\overline{OA'}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$(\text{comprimento } \overline{OA})^2 + (\text{comprimento } \overline{AA'})^2 = y^2, \text{ ou seja, } y^2 = 2.$$

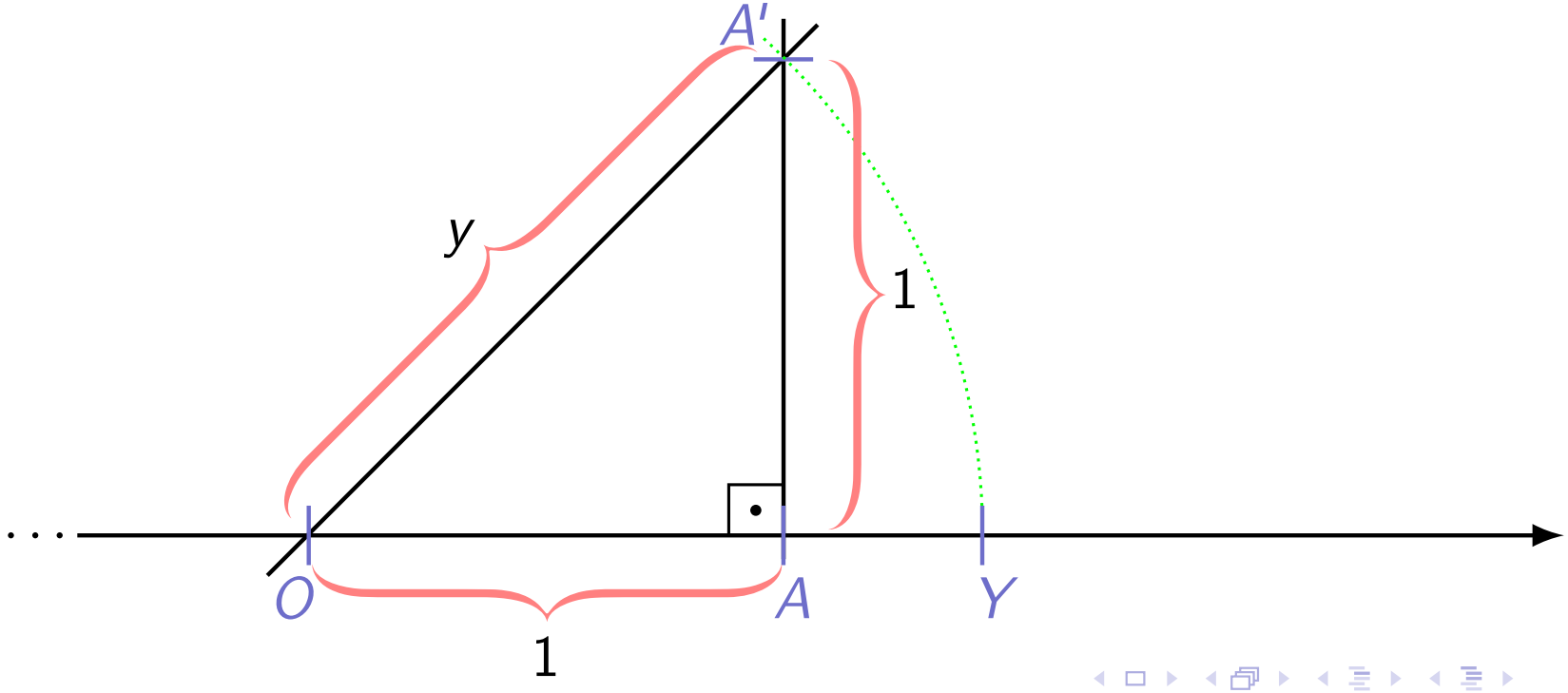


Existência da raiz quadrada de 2

Demonstração: Considere a reta real com origem O e segmento unitário $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{AA'}$, onde comprimento $\overline{AA'}$ = comprimento $\overline{OA}$. Construa o segmento $\overline{OA'}$, e chame de y o comprimento $\overline{OA'}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$(\text{comprimento } \overline{OA})^2 + (\text{comprimento } \overline{AA'})^2 = y^2, \text{ ou seja, } y^2 = 2.$$

Transfira A' para a reta real. O ponto Y corresponde ao número real $y = \frac{\overline{OY}}{\overline{OA}}$, que tem a propriedade $y^2 = 2$. ■



Existência da raiz quadrada de qualquer número

Usando o fato de que $\sqrt{2}$ é um número real, e uma construção semelhante ao Exemplo 1, podemos demonstrar que:

Exercício 3 (para casa)

Dado um número real $x \geq 0$, demonstre que $\sqrt{x}$ é real.

Existência da raiz quadrada de qualquer número

Usando o fato de que $\sqrt{2}$ é um número real, e uma construção semelhante ao Exemplo 1, podemos demonstrar que:

Exercício 3 (para casa)

Dado um número real $x \geq 0$, demonstre que $\sqrt{x}$ é real.

Podemos generalizar o conceito de raiz:

Definição 2 (m-ésima raiz)

*Seja $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}^*$. Um número real y é chamado m-**ésima raiz** de x se $y^m = x$.*

Geralmente, denotamos a m-ésima raiz de x por $\sqrt[m]{x}$.

Propriedades da m-ésima raiz

- Se $x \geq 0$: sempre existe m-ésima raiz (a demonstração depende do Axioma de Completude, ver pp. 64–69 do texto de Caputi & Miranda)

Propriedades da m-ésima raiz

- Se $x \geq 0$: sempre existe m-ésima raiz (a demonstração depende do Axioma de Completude, ver pp. 64–69 do texto de Caputi & Miranda)
- Se $x > 0$ e m par: há apenas dois números que satisfazem $y^m = x$, um positivo e um negativo.
  Neste caso, usaremos $\sqrt[m]{x}$ para denotar apenas a raiz positiva.

Propriedades da m-ésima raiz

- Se $x \geq 0$: sempre existe m-ésima raiz (a demonstração depende do Axioma de Completude, ver pp. 64–69 do texto de Caputi & Miranda)
- Se $x > 0$ e m par: há apenas dois números que satisfazem $y^m = x$, um positivo e um negativo.
  Neste caso, usaremos $\sqrt[m]{x}$ para denotar apenas a raiz positiva.
- Se $x < 0$: existirá m-ésima raiz se, e somente se, m é ímpar.

Propriedades da m-ésima raiz

- Se $x \geq 0$: sempre existe m-ésima raiz (a demonstração depende do Axioma de Completude, ver pp. 64–69 do texto de Caputi & Miranda)
- Se $x > 0$ e m par: há apenas dois números que satisfazem $y^m = x$, um positivo e um negativo.
  Neste caso, usaremos $\sqrt[m]{x}$ para denotar apenas a raiz positiva.
- Se $x < 0$: existirá m-ésima raiz se, e somente se, m é ímpar.
- Se m é ímpar: a m-ésima raiz de x é única.

Propriedades da m-ésima raiz

- Se $x \geq 0$: sempre existe m-ésima raiz (a demonstração depende do Axioma de Completude, ver pp. 64–69 do texto de Caputi & Miranda)
- Se $x > 0$ e m par: há apenas dois números que satisfazem $y^m = x$, um positivo e um negativo.
  Neste caso, usaremos $\sqrt[m]{x}$ para denotar apenas a raiz positiva.
- Se $x < 0$: existirá m-ésima raiz se, e somente se, m é ímpar.
- Se m é ímpar: a m-ésima raiz de x é única.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$:
  - Se m é ímpar, vale a identidade $\sqrt[m]{x^m} = (\sqrt[m]{x})^m = x$.
  - Se m é par, vale a identidade $\sqrt[m]{x^m} = |x|$.
    Note que, sendo m par e $x < 0$, não podemos dizer nada sobre $(\sqrt[m]{x})^m$, pois $\sqrt[m]{x}$ não é real.

As duas últimas propriedades motivam a notação $x^{\frac{1}{m}}$ para significar o mesmo que $\sqrt[m]{x}$.

Potências com expoentes racionais

Já vimos que é possível definir a operação de potência x^n para qualquer expoente inteiro:

$$x^n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \text{ e } x \neq 0 \\ \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ vezes}}, \text{ se } n > 0 \\ x^n = \frac{1}{x^{-n}}, \text{ se } n < 0 \end{cases}$$

Potências com expoentes racionais

Já vimos que é possível definir a operação de potência x^n para qualquer expoente inteiro:

$$x^n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \text{ e } x \neq 0 \\ \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ vezes}}, \text{ se } n > 0 \\ x^n = \frac{1}{x^{-n}}, \text{ se } n < 0 \end{cases}$$

Podemos estender a operação potência para expoentes racionais. Sendo $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}^*$, definimos:

$$x^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

Potências com expoentes racionais

Já vimos que é possível definir a operação de potência x^n para qualquer expoente inteiro:

$$x^n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \text{ e } x \neq 0 \\ \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ vezes}}, \text{ se } n > 0 \\ x^n = \frac{1}{x^{-n}}, \text{ se } n < 0 \end{cases}$$

Podemos estender a operação potência para expoentes racionais. Sendo $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}^*$, definimos:

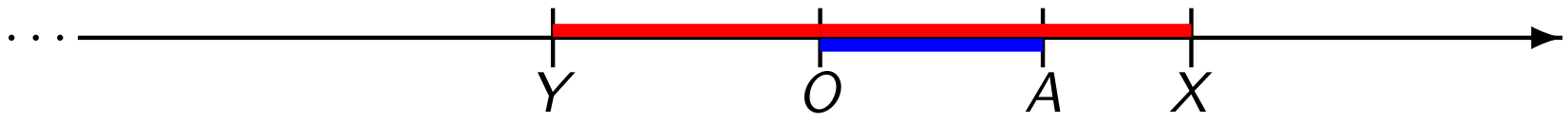
$$x^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

A extensão da potenciação a qualquer expoente real é possível.

(para detalhes, veja Caputi & Miranda, pp. 68–69)

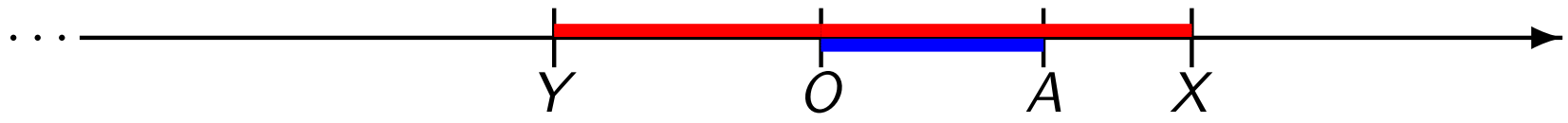
Distância na reta real: relação com o módulo

Dados dois números reais x e y, a sua **distância** pode ser definida como a razão entre os comprimentos $\overline{XY}$ e $\overline{OA}$ na reta real, onde X e Y são os pontos respectivos a x e y.



Distância na reta real: relação com o módulo

Dados dois números reais x e y, a sua **distância** pode ser definida como a razão entre os comprimentos $\overline{XY}$ e $\overline{OA}$ na reta real, onde X e Y são os pontos respectivos a x e y.



Desta forma, podemos definir:

Definição 3

*A **distância** entre dois números reais x e y é denotada por $d(x, y)$, e é definida por*

$$d(x, y) = |x - y|$$

Intervalos: subconjuntos particulares da reta real

Definição 4

Dados dois números reais $a \leq b$, definimos como ***intervalos de extremos*** *a* ***e*** *b os seguintes conjuntos abaixo:*

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ $\quad]a; b[$ *no ensino médio*
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $\quad]a; b]$ *no ensino médio*
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ $\quad [a; b[$ *no ensino médio*

Nota: você pode usar a notação que mais te agradar; porém, durante as aulas, o professor usará apenas as notações $(a; b)$, $(a; b]$ e $[a; b)$.

A **medida** de um intervalo com extremos a e b é definida por $d(a, b)$, ou seja,

$$d(a, b) = |a - b| = b - a.$$

A igualdade $|a - b| = b - a$ é válida pois assumimos que $a \leq b$.

Intervalos abertos, intervalos fechados

Definição 5

*Dizemos que um intervalo é **fechado** se **todos** os seus extremos estão **dentro** do intervalo.*

Definição 6

*Dizemos que um intervalo é **aberto** se **todos** os seus extremos estão **fora** do intervalo.*

Importante: um intervalo pode ser: apenas aberto; apenas fechado; aberto e fechado ao mesmo tempo; ou pode não ser nem aberto nem fechado.

Intervalos: representação na reta real

Dada a relação íntima entre pontos e números na reta real, a partir de agora passaremos a representar os pontos na reta segundo os seus respectivos valores reais.

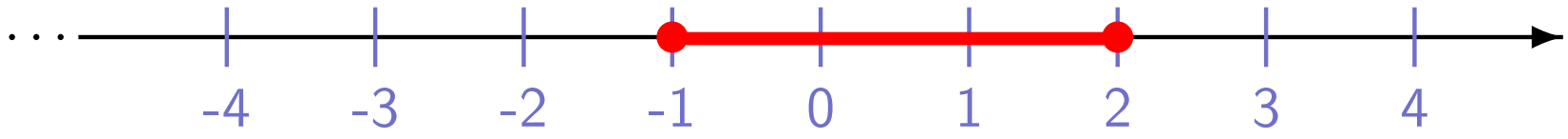
Notação gráfica: Se um extremo pertence a um intervalo, ele será desenhado como uma bolinha cheia $\bullet$ e se não pertence, como uma bolinha vazada $\circ$

Intervalos: representação na reta real

Dada a relação íntima entre pontos e números na reta real, a partir de agora passaremos a representar os pontos na reta segundo os seus respectivos valores reais.

Notação gráfica: Se um extremo pertence a um intervalo, ele será desenhado como uma bolinha cheia • e se não pertence, como uma bolinha vazada ∘

Exemplos: Intervalo $[-1; 2]$

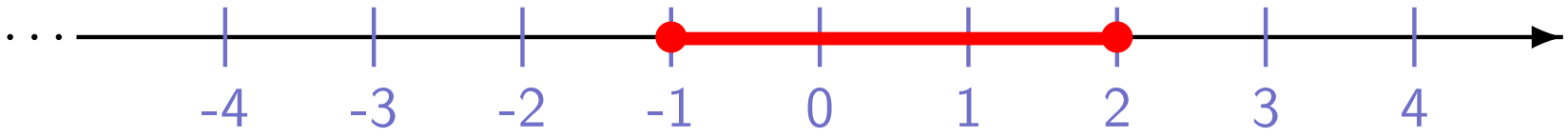


Intervalos: representação na reta real

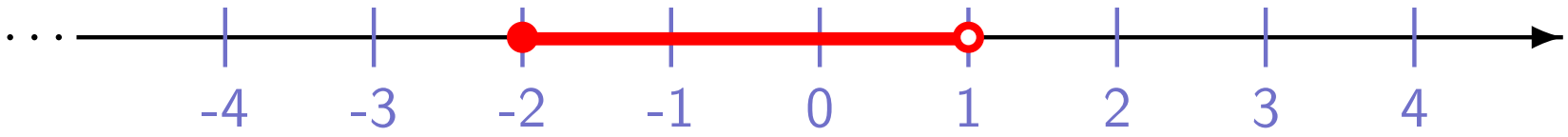
Dada a relação íntima entre pontos e números na reta real, a partir de agora passaremos a representar os pontos na reta segundo os seus respectivos valores reais.

Notação gráfica: Se um extremo pertence a um intervalo, ele será desenhado como uma bolinha cheia • e se não pertence, como uma bolinha vazada ∘

Exemplos: Intervalo $[-1; 2]$



Intervalo $[-2; 1)$



Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Extremos: a e b

sendo que ambos pertencem ao intervalo

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Extremos: a e b

sendo que ambos pertencem ao intervalo

Aberto? não

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Extremos: a e b

sendo que ambos pertencem ao intervalo

Aberto? não

Fechado? sim

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Extremos: a e b

sendo que ambos pertencem ao intervalo

Aberto? não

Fechado? sim

Medida: $|a - b| = b - a > 0$

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Extremos: a e b

sendo que ambos estão fora do intervalo

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Extremos: a e b

sendo que ambos estão fora do intervalo

Aberto? sim

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Extremos: a e b

sendo que ambos estão fora do intervalo

Aberto? sim

Fechado? não

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Extremos: a e b

sendo que ambos estão fora do intervalo

Aberto? sim

Fechado? não

Medida: $|a - b| = b - a > 0$

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Extremos: a e b

sendo que um pertence, mas o outro está fora do intervalo

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Extremos: a e b

sendo que um pertence, mas o outro está fora do intervalo

Aberto? não (pois extremo a pertence ao intervalo)

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Extremos: a e b

sendo que um pertence, mas o outro está fora do intervalo

Aberto? não (pois extremo a pertence ao intervalo)

Fechado? não (pois extremo b está fora do intervalo)

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b)$, onde $a < b$.

Definição: $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Extremos: a e b

sendo que um pertence, mas o outro está fora do intervalo

Aberto? não (pois extremo a pertence ao intervalo)

Fechado? não (pois extremo b está fora do intervalo)

Medida: $|a - b| = b - a > 0$

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Extremos: a e b

sendo que um pertence, mas o outro está fora do intervalo

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Extremos: a e b

sendo que um pertence, mas o outro está fora do intervalo

Aberto? não (pois extremo b pertence ao intervalo)

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Extremos: a e b

sendo que um pertence, mas o outro está fora do intervalo

Aberto? não (pois extremo b pertence ao intervalo)

Fechado? não (pois extremo a está fora do intervalo)

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; b]$, onde $a < b$.

Definição: $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Extremos: a e b

sendo que um pertence, mas o outro está fora do intervalo

Aberto? não (pois extremo b pertence ao intervalo)

Fechado? não (pois extremo a está fora do intervalo)

Medida: $|a - b| = b - a > 0$

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a = b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Extremos:

Aberto?

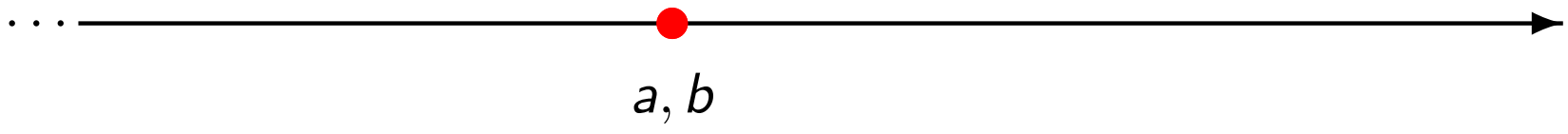
Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a = b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, mas como $a = b$, a desigualdade se torna $a \leq x \leq a$, o que significa $x = a$. Portanto, o intervalo é apenas 1 ponto (intervalo degenerado).



Extremos: a, apenas um extremo

Aberto?

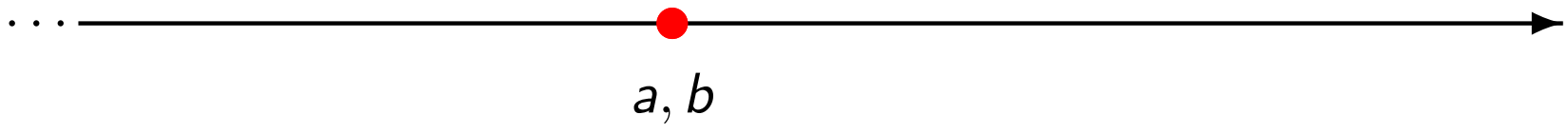
Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a = b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, mas como $a = b$, a desigualdade se torna $a \leq x \leq a$, o que significa $x = a$. Portanto, o intervalo é apenas 1 ponto (intervalo degenerado).



Extremos: a, apenas um extremo

Aberto? não (o único extremo pertence ao intervalo)

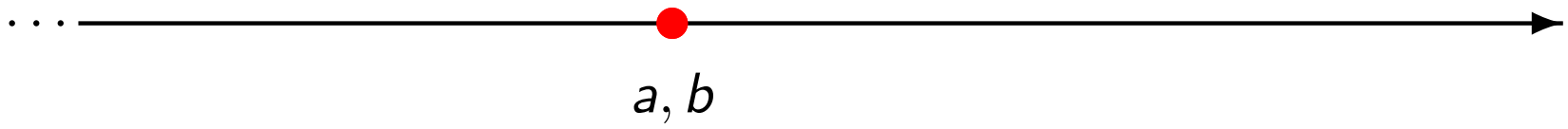
Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a = b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, mas como $a = b$, a desigualdade se torna $a \leq x \leq a$, o que significa $x = a$. Portanto, o intervalo é apenas 1 ponto (intervalo degenerado).



Extremos: a, apenas um extremo

Aberto? não (o único extremo pertence ao intervalo)

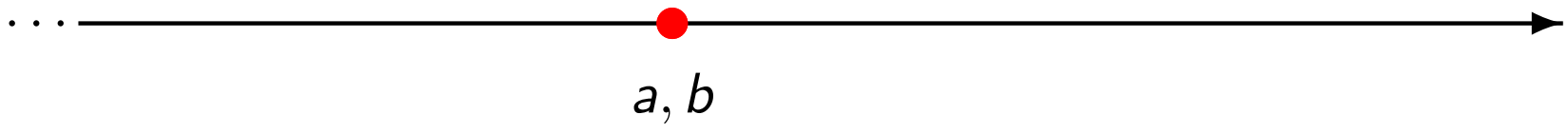
Fechado? sim (pois todos os extremos – só há um – pertencem ao intervalo)

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $[a; b]$, onde $a = b$.

Definição: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, mas como $a = b$, a desigualdade se torna $a \leq x \leq a$, o que significa $x = a$. Portanto, o intervalo é apenas 1 ponto (intervalo degenerado).



Extremos: a, apenas um extremo

Aberto? não (o único extremo pertence ao intervalo)

Fechado? sim (pois todos os extremos – só há um – pertencem ao intervalo)

Medida: $|a - b| = a - a = 0$ (medida nula)

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; a)$.

Definição: $(a; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a\}$

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; a)$.

Definição: $(a; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a\}$, como não há nenhum x real que satisfaça $a < x$ e $x < a$ ao mesmo tempo, temos que $(a; a) = \varnothing$ (intervalo degenerado).

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; a)$.

Definição: $(a; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a\}$, como não há nenhum x real que satisfaça $a < x$ e $x < a$ ao mesmo tempo, temos que $(a; a) = \varnothing$ (intervalo degenerado).

Extremos: nenhum

Aberto?

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; a)$.

Definição: $(a; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a\}$, como não há nenhum x real que satisfaça $a < x$ e $x < a$ ao mesmo tempo, temos que $(a; a) = \varnothing$ (intervalo degenerado).

Extremos: nenhum

Aberto? sim (todos os extremos estão fora do intervalo, pois não há nenhum)

Fechado?

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; a)$.

Definição: $(a; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a\}$, como não há nenhum x real que satisfaça $a < x$ e $x < a$ ao mesmo tempo, temos que $(a; a) = \varnothing$ (intervalo degenerado).

Extremos: nenhum

Aberto? sim (todos os extremos estão fora do intervalo, pois não há nenhum)

Fechado? sim (todos os extremos pertencem ao intervalo, pois não há nenhum)

Medida:

Propriedades dos Intervalos

Intervalo $(a; a)$.

Definição: $(a; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a\}$, como não há nenhum x real que satisfaça $a < x$ e $x < a$ ao mesmo tempo, temos que $(a; a) = \varnothing$ (intervalo degenerado).

Extremos: nenhum

Aberto? sim (todos os extremos estão fora do intervalo, pois não há nenhum)

Fechado? sim (todos os extremos pertencem ao intervalo, pois não há nenhum)

Medida: $|a - a| = 0$ (medida nula)

Intervalos ilimitados

É conveniente definir os seguintes intervalos ilimitados:

- $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Note que os "extremos infinitos" não são números reais, logo não podem pertencer a nenhum intervalo, portanto nunca se usa colchete no lado do intervalo onde eles estão.

Para estes intervalos, não definimos medida.

Por conveniência, define-se o intervalo $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$

Intervalos ilimitados

Intervalo $[a; +\infty)$.

Definição: $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $[a; +\infty)$.

Definição: $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Extremos: a, apenas um extremo

Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $[a; +\infty)$.

Definição: $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Extremos: a, apenas um extremo

Aberto? não (há um extremo que pertence ao intervalo)

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $[a; +\infty)$.

Definição: $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Extremos: a, apenas um extremo

Aberto? não (há um extremo que pertence ao intervalo)

Fechado? sim (todos os extremos – ou melhor, o único extremo – pertencem ao intervalo)

Intervalos ilimitados

Intervalo $(a; +\infty)$.

Definição: $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(a; +\infty)$.

Definição: $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

Extremos: a, apenas um extremo

Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(a; +\infty)$.

Definição: $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

Extremos: a, apenas um extremo

Aberto? sim (todos os extremos – o ponto a – estão fora do intervalo)

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(a; +\infty)$.

Definição: $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

Extremos: a, apenas um extremo

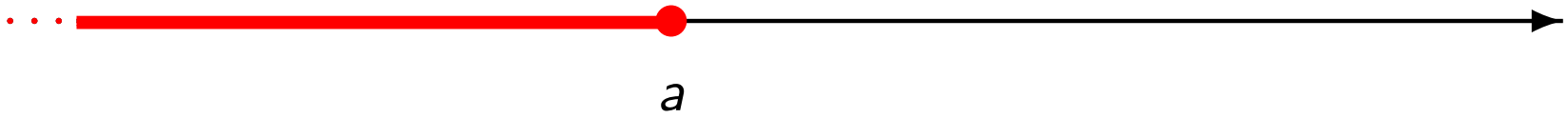
Aberto? sim (todos os extremos – o ponto a – estão fora do intervalo)

Fechado? não (há um extremo fora do intervalo)

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; a]$.

Definição: $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



Extremos:

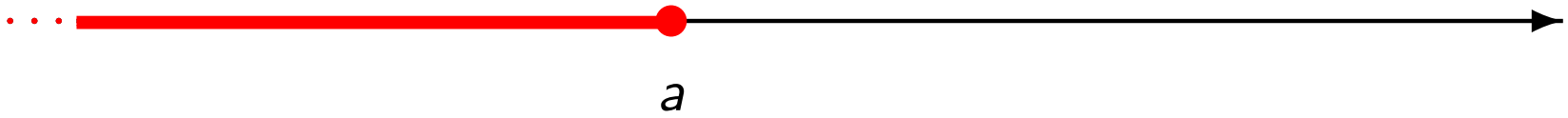
Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; a]$.

Definição: $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



Extremos: a, apenas um extremo

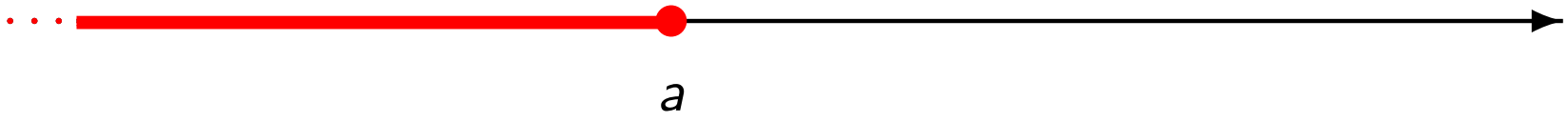
Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; a]$.

Definição: $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



Extremos: a, apenas um extremo

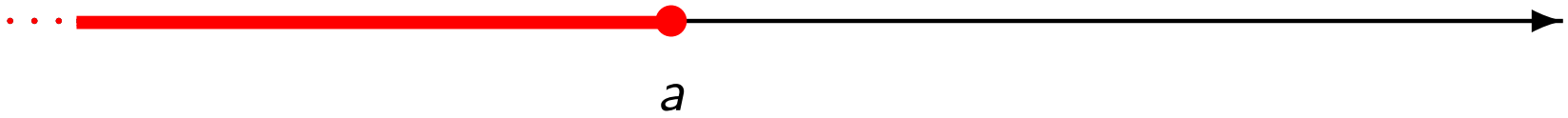
Aberto? não (há um extremo que pertence ao intervalo)

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; a]$.

Definição: $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



Extremos: a, apenas um extremo

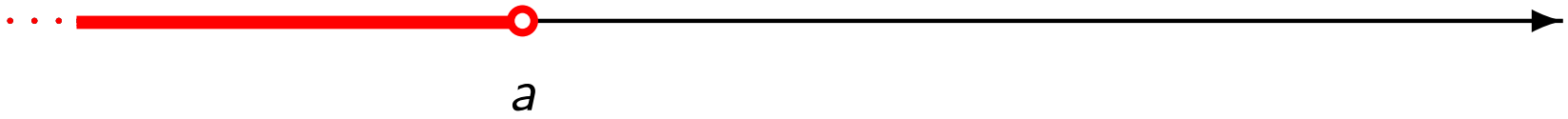
Aberto? não (há um extremo que pertence ao intervalo)

Fechado? sim (todos os extremos – ou melhor, o único extremo – pertencem ao intervalo)

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; a)$.

Definição: $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



Extremos:

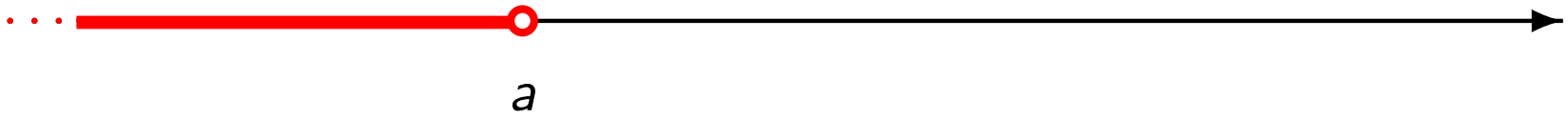
Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; a)$.

Definição: $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



Extremos: a, apenas um extremo

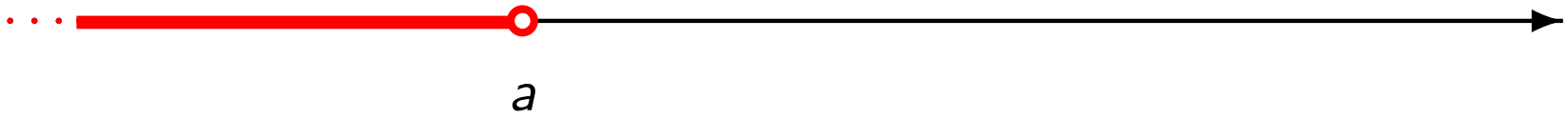
Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; a)$.

Definição: $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



Extremos: a, apenas um extremo

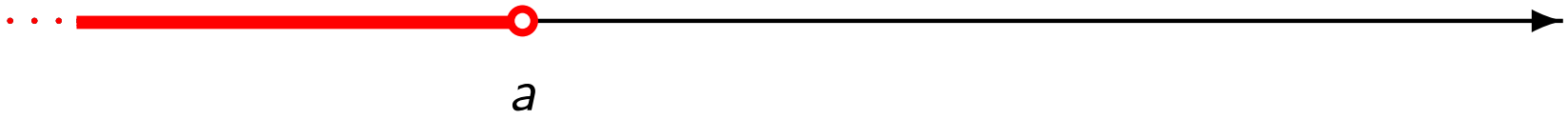
Aberto? sim (todos os extremos – o ponto a – estão fora do intervalo)

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; a)$.

Definição: $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



Extremos: a, apenas um extremo

Aberto? sim (todos os extremos – o ponto a – estão fora do intervalo)

Fechado? não (há um extremo fora do intervalo)

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

Extremos:

Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

Extremos: nenhum extremo

Aberto?

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

Extremos: nenhum extremo

Aberto? sim (como não há nenhum, podemos dizer que todos os extremos estão fora do intervalo)

Fechado?

Intervalos ilimitados

Intervalo $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

Extremos: nenhum extremo

Aberto? sim (como não há nenhum, podemos dizer que todos os extremos estão fora do intervalo)

Fechado? sim (como não há nenhum, podemos dizer que todos os extremos pertencem ao intervalo)

Classificação dos intervalos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$:

intervalo	aberto	fechado	medida
$[a; b]$	não	**sim**	$b - a \neq 0$
$[a; a] \quad = \{a\}$	não	**sim**	0 (nula)
$[a; +\infty)$	não	**sim**	?
$(-\infty; a]$	não	**sim**	?

Classificação dos intervalos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$:

intervalo	aberto	fechado	medida
$[a; b]$	não	**sim**	$b - a \neq 0$
$[a; a] \quad = \{a\}$	não	**sim**	0 (nula)
$[a; +\infty)$	não	**sim**	?
$(-\infty; a]$	não	**sim**	?
$(a; b)$	**sim**	não	$b - a \neq 0$
$(a; +\infty)$	**sim**	não	?
$(-\infty; a)$	**sim**	não	?

Classificação dos intervalos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$:

intervalo	aberto	fechado	medida
$[a; b]$	não	**sim**	$b - a \neq 0$
$[a; a] \quad = \{a\}$	não	**sim**	0 (nula)
$[a; +\infty)$	não	**sim**	?
$(-\infty; a]$	não	**sim**	?
$(a; b)$	**sim**	não	$b - a \neq 0$
$(a; +\infty)$	**sim**	não	?
$(-\infty; a)$	**sim**	não	?
$[a; b)$	não	não	$b - a \neq 0$
$(a; b]$	não	não	$b - a \neq 0$

Classificação dos intervalos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$:

intervalo	aberto	fechado	medida
$[a; b]$	não	**sim**	$b - a \neq 0$
$[a; a] \quad = \{a\}$	não	**sim**	0 (nula)
$[a; +\infty)$	não	**sim**	?
$(-\infty; a]$	não	**sim**	?
$(a; b)$	**sim**	não	$b - a \neq 0$
$(a; +\infty)$	**sim**	não	?
$(-\infty; a)$	**sim**	não	?
$[a; b)$	não	não	$b - a \neq 0$
$(a; b]$	não	não	$b - a \neq 0$
$(a; a) \quad = \varnothing$	**sim**	**sim**	0 (nula)
$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$	**sim**	**sim**	?

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x - 1| \geq 2$ *como união de intervalos.*

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ *como união de intervalos.*

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ *como união de intervalos.*

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.
Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ como união de intervalos.

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.
Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.
Neste caso, a inequação se torna $x-1 \geq 2$, logo, $x \geq 3$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ como união de intervalos.

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.

Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Neste caso, a inequação se torna $x-1 \geq 2$, logo, $x \geq 3$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Caso 2: $x-1 < 0$, ou seja, $x < 1$.

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ como união de intervalos.

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.

Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Neste caso, a inequação se torna $x-1 \geq 2$, logo, $x \geq 3$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Caso 2: $x-1 < 0$, ou seja, $x < 1$.

Neste caso, a inequação se torna $-(x-1) \geq 2$; portanto, $x-1 \leq -2$, ou seja, $x \leq -1$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ como união de intervalos.

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.

Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Neste caso, a inequação se torna $x-1 \geq 2$, logo, $x \geq 3$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Caso 2: $x-1 < 0$, ou seja, $x < 1$.

Neste caso, a inequação se torna $-(x-1) \geq 2$; portanto, $x-1 \leq -2$, ou seja, $x \leq -1$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Logo, o conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ ou } x \leq -1\}$, ou seja,

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ como união de intervalos.

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.

Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Neste caso, a inequação se torna $x-1 \geq 2$, logo, $x \geq 3$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Caso 2: $x-1 < 0$, ou seja, $x < 1$.

Neste caso, a inequação se torna $-(x-1) \geq 2$; portanto, $x-1 \leq -2$, ou seja, $x \leq -1$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Logo, o conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ ou } x \leq -1\}$, ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \quad \cup \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} =$$

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ como união de intervalos.

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.

Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Neste caso, a inequação se torna $x-1 \geq 2$, logo, $x \geq 3$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Caso 2: $x-1 < 0$, ou seja, $x < 1$.

Neste caso, a inequação se torna $-(x-1) \geq 2$; portanto, $x-1 \leq -2$, ou seja, $x \leq -1$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Logo, o conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ ou } x \leq -1\}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \quad &\cup \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} = \\ = [3; +\infty) \quad &\cup \quad (-\infty; -1] \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ como união de intervalos.

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.

Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Neste caso, a inequação se torna $x-1 \geq 2$, logo, $x \geq 3$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

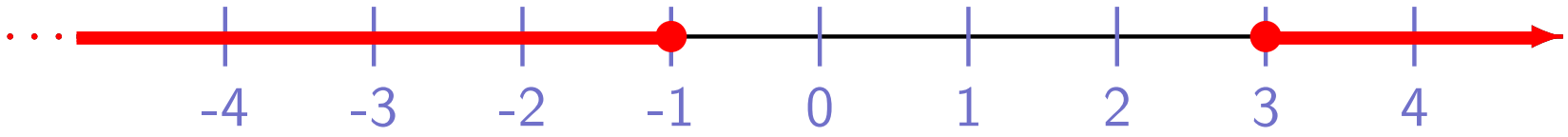
Caso 2: $x-1 < 0$, ou seja, $x < 1$.

Neste caso, a inequação se torna $-(x-1) \geq 2$; portanto, $x-1 \leq -2$, ou seja, $x \leq -1$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Logo, o conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ ou } x \leq -1\}$, ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \quad \cup \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} =$$

$$= [3; +\infty) \quad \cup \quad (-\infty; -1] \ \blacksquare$$



Exercício 4

Escreva o conjunto solução de $|x-1| \geq 2$ como união de intervalos.

Desenvolvimento: Dois casos a considerar: $x-1 \geq 0$ e $x-1 < 0$.

Caso 1: $x-1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$.

Neste caso, a inequação se torna $x-1 \geq 2$, logo, $x \geq 3$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

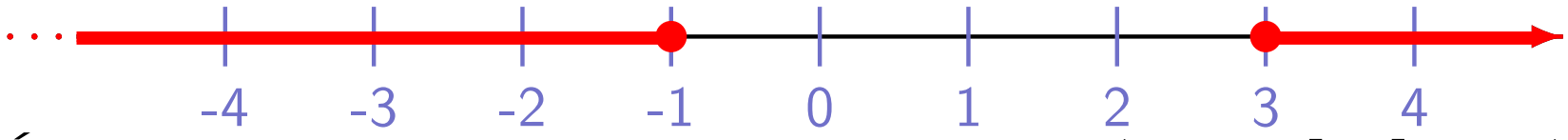
Caso 2: $x-1 < 0$, ou seja, $x < 1$.

Neste caso, a inequação se torna $-(x-1) \geq 2$; portanto, $x-1 \leq -2$, ou seja, $x \leq -1$. (observe que satisfaz também a hipótese deste caso)

Logo, o conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ ou } x \leq -1\}$, ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \quad \cup \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} =$$

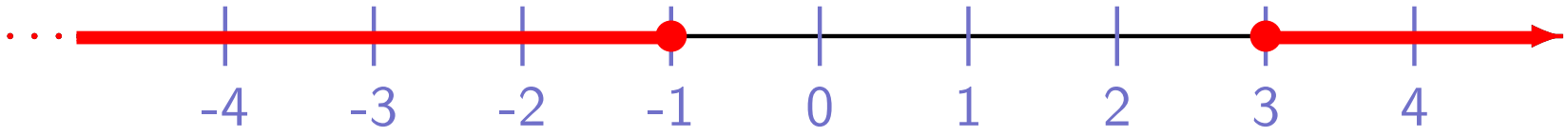
$$= [3; +\infty) \quad \cup \quad (-\infty; -1] \quad \blacksquare$$



É comum escrever os intervalos "em ordem": $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

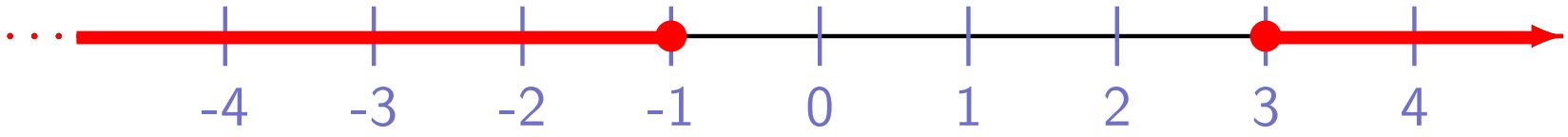
Operações de conjuntos e intervalos

Nem sempre a união de intervalos é um intervalo. Como visto no exercício anterior, $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ não é um intervalo.



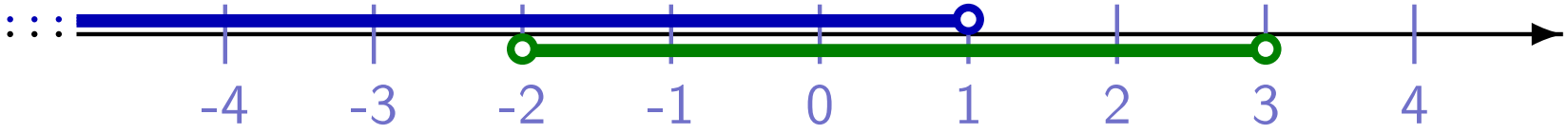
Operações de conjuntos e intervalos

Nem sempre a união de intervalos é um intervalo. Como visto no exercício anterior, $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ não é um intervalo.



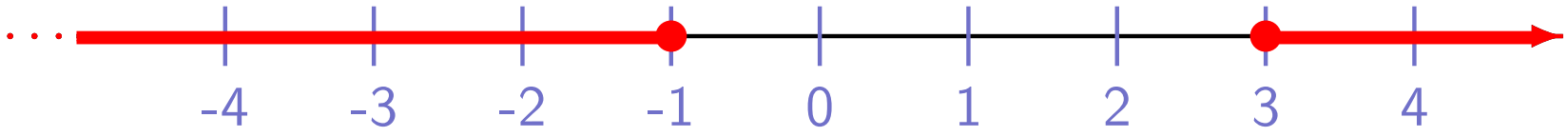
O que podemos dizer da interseção de intervalos?

Exemplos: $(-\infty; 1) \cap (-2; 3) =$



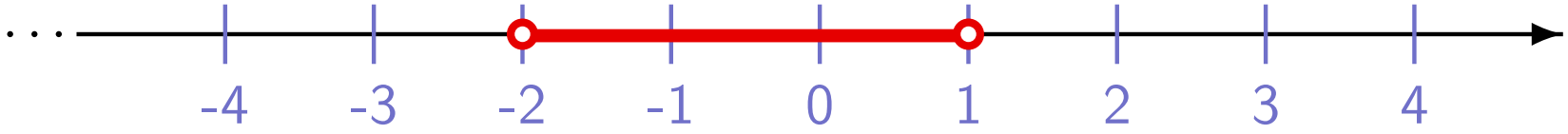
Operações de conjuntos e intervalos

Nem sempre a união de intervalos é um intervalo. Como visto no exercício anterior, $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ não é um intervalo.



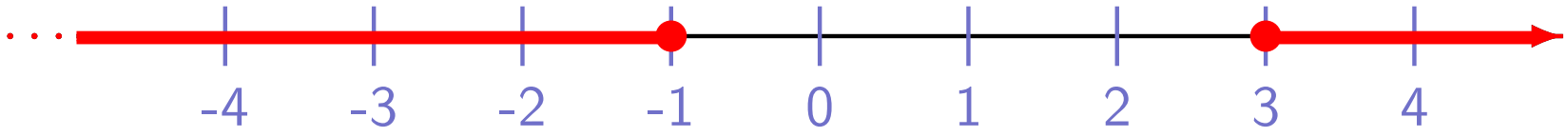
O que podemos dizer da interseção de intervalos?

Exemplos: $(-\infty; 1) \cap (-2; 3) = (-2; 1)$



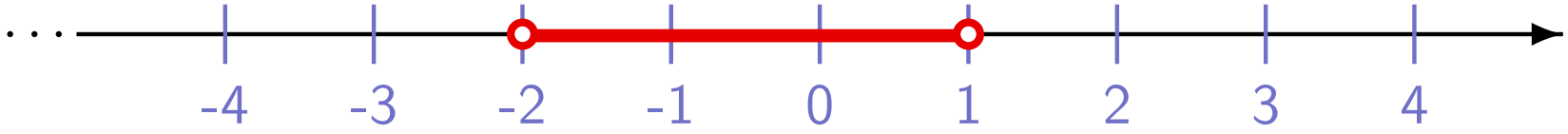
Operações de conjuntos e intervalos

Nem sempre a união de intervalos é um intervalo. Como visto no exercício anterior, $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ não é um intervalo.

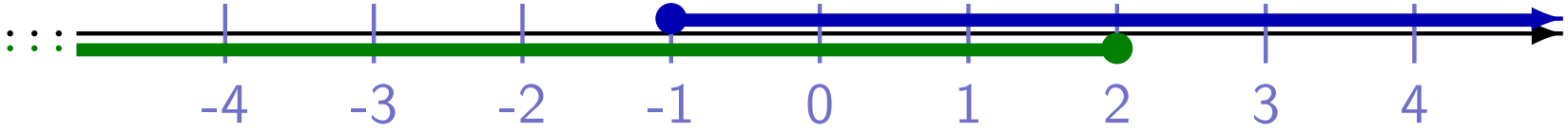


O que podemos dizer da interseção de intervalos?

Exemplos: $(-\infty; 1) \cap (-2; 3) = (-2; 1)$

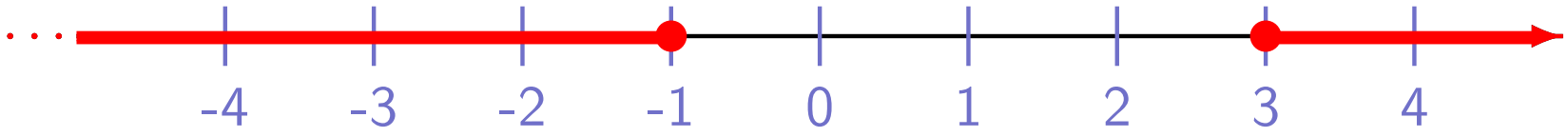


$[-1; +\infty) \cap (-\infty; 2] =$



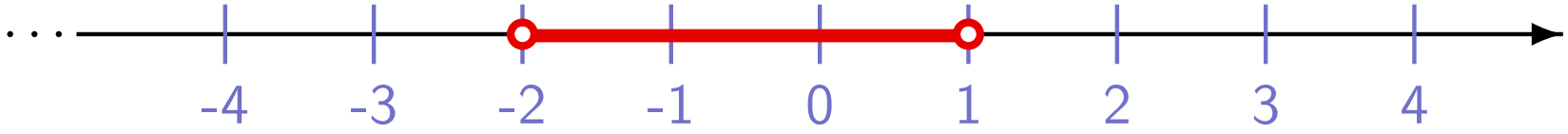
Operações de conjuntos e intervalos

Nem sempre a união de intervalos é um intervalo. Como visto no exercício anterior, $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ não é um intervalo.

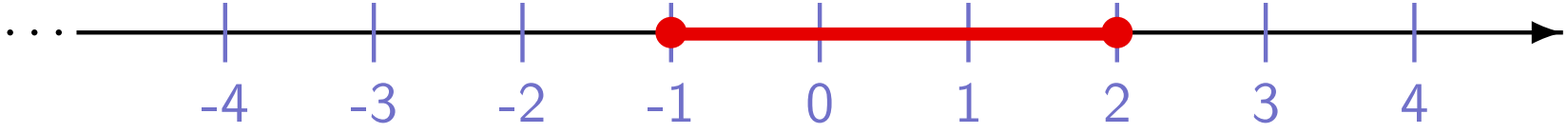


O que podemos dizer da interseção de intervalos?

Exemplos: $(-\infty; 1) \cap (-2; 3) = (-2; 1)$

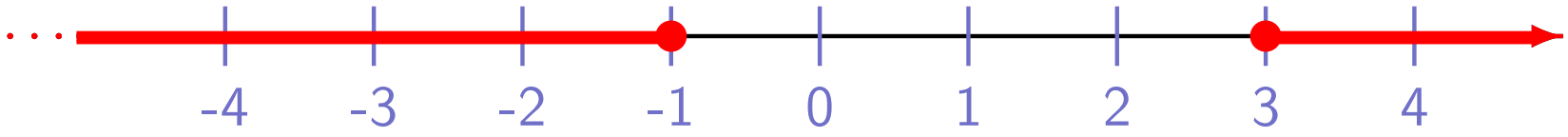


$[-1; +\infty) \cap (-\infty; 2] = [-1; 2]$



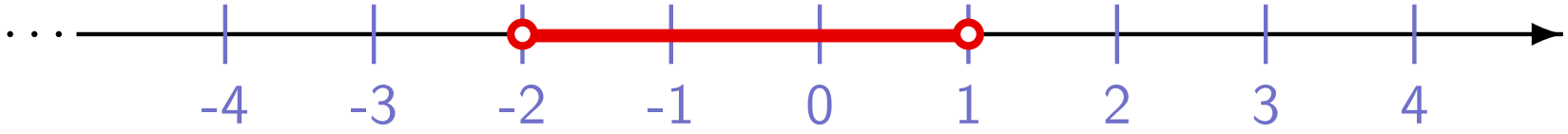
Operações de conjuntos e intervalos

Nem sempre a união de intervalos é um intervalo. Como visto no exercício anterior, $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ não é um intervalo.

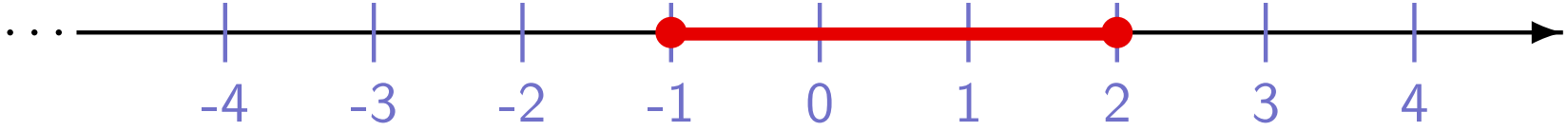


O que podemos dizer da interseção de intervalos?

Exemplos: $(-\infty; 1) \cap (-2; 3) = (-2; 1)$



$[-1; +\infty) \cap (-\infty; 2] = [-1; 2]$



$(-1; 1) \cap (3; 4) = \varnothing$ e $(-\infty; 2] \cap [2; 5] = \{2\}$

Lembrando que o conjunto vazio e um ponto são considerados intervalos (degenerados).

Operações de conjuntos e intervalos

Conclusões:

- A união de intervalos **pode não ser** um intervalo
- A interseção de intervalos **sempre é** um intervalo (podendo ser um intervalo degenerado)

Operações de conjuntos e intervalos

Conclusões:

- A união de intervalos **pode não ser** um intervalo
- A interseção de intervalos **sempre é** um intervalo (podendo ser um intervalo degenerado)

Mais ainda, é possível provar o seguinte teorema (use o princípio de indução finita).

Teorema 1 (demonstre em casa)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *intervalos na reta real e* $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$.

- *1) Se* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *são intervalos abertos, então* X *é intervalo aberto.*
- *2) Se* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *são intervalos fechados, então* X *é intervalo fechado.*

Para casa

- Fazer as tarefas para casa desta aula
- Ler páginas 58–80 do texto de Caputi & Miranda.
- Fazer a lista 4.
- Revisar matéria para a prova de semana que vem!
- Ficar atento às atualizações do site.