Bases Matemáticas

Aula 9 – Equações

Rodrigo Hausen

28 de agosto de 2013

Definição 1

*Uma **equação** na incógnita x é uma proposição aberta sobre a igualdade de duas expressões envolvendo a variável x:*

$$f(x) = g(x)$$

O **domínio** de uma equação $f(x) = g(x)$ é o conjunto de valores para os quais as expressões $f(x)$ e $g(x)$ estão definidas.

Exemplos:

- $ax + b = 0$, onde a, b são constantes reais, é chamada **equação linear** e seu domínio é $\mathbb{R}$
- $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são constantes reais, é chamada **equação quadrática** e seu domínio é $\mathbb{R}$
- $\frac{1}{x} = 2$, cujo domínio é $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Resolução de equações, conjunto solução

Definição 2

O conjunto solução de uma equação $f(x) = g(x)$, *cujo domínio é* D, *é o conjunto*

$$Sol_{f(x)=g(x)} = \{x \in D \mid \text{“}f(x) = g(x)\text{” é verdadeira}\}.$$

Resolver uma equação é encontrar o seu conjunto solução.

Exemplo: Resolva a equação $4x + 8 = 0$.

Definição 2

O conjunto solução de uma equação $f(x) = g(x)$, cujo domínio é D, é o conjunto

$$Sol_{f(x)=g(x)} = \{x \in D \mid \text{“}f(x) = g(x)\text{” é verdadeira}\}.$$

Resolver uma equação é encontrar o seu conjunto solução.

Exemplo: Resolva a equação $4x + 8 = 0$.

Dizemos que -2 é uma solução para (ou que -2 satisfaz) a equação $4x + 8 = 0$, pois

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-2) + 8 &= 0 \\ -8 + 8 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{é verdadeira} \end{aligned}$$

Podemos demonstrar que -2 é a única solução para esta equação, portanto $Sol_{4x+8=0} = \{-2\}$.

Equações equivalentes

Definição 3 (equações equivalentes)

Dizemos que a equação $p(x) = q(x)$ *é equivalente à equação* $f(x) = g(x)$ *se ambas equações possuem o mesmo domínio e conjunto solução.*

Definição 3 (equações equivalentes)

Dizemos que a equação $p(x) = q(x)$ é equivalente à equação $f(x) = g(x)$ se ambas equações possuem o mesmo domínio e conjunto solução.

Dadas uma equação $f(x) = g(x)$ em uma variável real x, e $c \in \mathbb{R}$, as seguintes equações são equivalentes à original:

- $f(x) + c = g(x) + c$

Equações equivalentes

Definição 3 (equações equivalentes)

Dizemos que a equação $p(x) = q(x)$ é equivalente à equação $f(x) = g(x)$ se ambas equações possuem o mesmo domínio e conjunto solução.

Dadas uma equação $f(x) = g(x)$ em uma variável real x, e $c \in \mathbb{R}$, as seguintes equações são equivalentes à original:

- $f(x) + c = g(x) + c$
- $c \cdot f(x) = c \cdot g(x)$, se $c \neq 0$

Equações equivalentes

Definição 3 (equações equivalentes)

Dizemos que a equação $p(x) = q(x)$ é equivalente à equação $f(x) = g(x)$ se ambas equações possuem o mesmo domínio e conjunto solução.

Dadas uma equação $f(x) = g(x)$ em uma variável real x, e $c \in \mathbb{R}$, as seguintes equações são equivalentes à original:

- $f(x) + c = g(x) + c$
- $c \cdot f(x) = c \cdot g(x)$, se $c \neq 0$
- $(f(x))^2 = (g(x))^2$, se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ para todo x no domínio.

Equações equivalentes

Definição 3 (equações equivalentes)

Dizemos que a equação $p(x) = q(x)$ é equivalente à equação $f(x) = g(x)$ se ambas equações possuem o mesmo domínio e conjunto solução.

Dadas uma equação $f(x) = g(x)$ em uma variável real x, e $c \in \mathbb{R}$, as seguintes equações são equivalentes à original:

- $f(x) + c = g(x) + c$
- $c \cdot f(x) = c \cdot g(x)$, se $c \neq 0$
- $(f(x))^2 = (g(x))^2$, se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ para todo x no domínio.

Verifique que o conjunto solução não se altera em nenhum destes casos.

Equações lineares

Uma **equação linear** na variável x tem a forma

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Equações lineares

Uma **equação linear** na variável x tem a forma

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver esse tipo de equação, nós a reduzimos a equações equivalentes mais simples, da seguinte forma:

Equações lineares

Uma **equação linear** na variável x tem a forma

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver esse tipo de equação, nós a reduzimos a equações equivalentes mais simples, da seguinte forma:

$$ax + b \quad = \quad 0$$

Equações lineares

Uma **equação linear** na variável x tem a forma

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver esse tipo de equação, nós a reduzimos a equações equivalentes mais simples, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax + b + (-b) &= 0 + (-b) \end{aligned}$$

Equações lineares

Uma **equação linear** na variável x tem a forma

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver esse tipo de equação, nós a reduzimos a equações equivalentes mais simples, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax + b + (-b) &= 0 + (-b) \\ ax &= -b \end{aligned}$$

Equações lineares

Uma **equação linear** na variável x tem a forma

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver esse tipo de equação, nós a reduzimos a equações equivalentes mais simples, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax + b + (-b) &= 0 + (-b) \\ ax &= -b \\ (a^{-1})ax &= (a^{-1})(-b) \end{aligned}$$

Equações lineares

Uma **equação linear** na variável x tem a forma

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver esse tipo de equação, nós a reduzimos a equações equivalentes mais simples, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
ax + b &= 0 \\
ax + b + (-b) &= 0 + (-b) \\
ax &= -b \\
(a^{-1})ax &= (a^{-1})(-b) \\
x &= -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Equações lineares

Uma **equação linear** na variável x tem a forma

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver esse tipo de equação, nós a reduzimos a equações equivalentes mais simples, da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} ax + b & = & 0 \\ ax + b + (-b) & = & 0 + (-b) \\ ax & = & -b \\ (a^{-1})ax & = & (a^{-1})(-b) \\ x & = & -\dfrac{b}{a} \end{array}$$

Todas as equações são equivalentes, portanto tem o mesmo conjunto solução. Porém, vemos facilmente pela última equação que há apenas uma solução: $x = -\frac{b}{a}$.

Uma **equação quadrática** na variável x tem a forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Mostraremos a seguir como resolver tal equação.

Equações quadráticas

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a(ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0 \qquad (\times\, 4a)$$

Equações quadráticas

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a(ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 && (\times\, 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \text{(simplificando)}
\end{aligned}
$$

Equações quadráticas

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a(ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 && (\times\ 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \text{(simplificando)} \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (-4ac) &= 0 + (-4ac) && (-\ 4ac)
\end{aligned}
$$

Equações quadráticas

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a(ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 && (\times\ 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \text{(simplificando)} \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (-4ac) &= 0 + (-4ac) && (-\ 4ac) \\
4a^2x^2 + 4abx &= -4ac && \text{(simplificando)}
\end{aligned}$$

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a(ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 && (\times\, 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \text{(simplificando)} \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (-4ac) &= 0 + (-4ac) && (-\, 4ac) \\
4a^2x^2 + 4abx &= -4ac && \text{(simplificando)} \\
(2ax)^2 + 2(2ax)b &= -4ac && \text{(simplificando)}
\end{aligned}
$$

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a(ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 && (\times\ 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \text{(simplificando)} \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (-4ac) &= 0 + (-4ac) && (-\ 4ac) \\
4a^2x^2 + 4abx &= -4ac && \text{(simplificando)} \\
(2ax)^2 + 2(2ax)b &= -4ac && \text{(simplificando)} \\
(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 &= -4ac + b^2 && (+\ b^2)
\end{aligned}
$$

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a(ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 && (\times\ 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \text{(simplificando)} \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (-4ac) &= 0 + (-4ac) && (-\ 4ac) \\
4a^2x^2 + 4abx &= -4ac && \text{(simplificando)} \\
(2ax)^2 + 2(2ax)b &= -4ac && \text{(simplificando)} \\
(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 &= -4ac + b^2 && (+\ b^2) \\
(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac && \text{(simpl. quadrado perfeito)}
\end{aligned}
$$

Reduzindo a equações equivalentes mais simples:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a(ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 && (\times\ 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 && \text{(simplificando)} \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (-4ac) &= 0 + (-4ac) && (-\ 4ac) \\
4a^2x^2 + 4abx &= -4ac && \text{(simplificando)} \\
(2ax)^2 + 2(2ax)b &= -4ac && \text{(simplificando)} \\
(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 &= -4ac + b^2 && (+\ b^2) \\
(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac && \text{(simpl. quadrado perfeito)}
\end{aligned}
$$

Continua...

De $ax^2 + bx + c = 0$ obtivemos a equação equivalente

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Note que o quadrado de um número real sempre deve ser positivo, portanto assumiremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ para que a igualdade tenha solução.

$$2ax + b \quad = \quad \sqrt{b^2 - 4ac} \qquad \text{ou} \qquad -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Equações quadráticas

De $ax^2 + bx + c = 0$ obtivemos a equação equivalente

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Note que o quadrado de um número real sempre deve ser positivo, portanto assumiremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ para que a igualdade tenha solução.

$$\begin{array}{rcl} 2ax + b & = & \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{b^2 - 4ac} \\ 2ax + b + (-b) & = & -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad -b - \sqrt{b^2 - 4ac} \end{array}$$

De $ax^2 + bx + c = 0$ obtivemos a equação equivalente

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Note que o quadrado de um número real sempre deve ser positivo, portanto assumiremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ para que a igualdade tenha solução.

$$\begin{array}{rclcl}
2ax + b & = & \sqrt{b^2 - 4ac} & \text{ou} & -\sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax + b + (-b) & = & -b + \sqrt{b^2 - 4ac} & \text{ou} & -b - \sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax & = & -b + \sqrt{b^2 - 4ac} & \text{ou} & -b - \sqrt{b^2 - 4ac}
\end{array}$$

De $ax^2 + bx + c = 0$ obtivemos a equação equivalente
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$
Note que o quadrado de um número real sempre deve ser positivo, portanto assumiremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ para que a igualdade tenha solução.

$$\begin{array}{rcl}
2ax + b & = & \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax + b + (-b) & = & -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad -b - \sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax & = & -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad -b - \sqrt{b^2 - 4ac}
\end{array}$$

Logo, se $b^2 - 4ac \geq 0$, o conjunto solução de $ax^2 + bx + c = 0$ é:

$$\left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

Por outro lado, se $b^2 - 4ac < 0$, não há solução real para a equação.

Uma **equação biquadrática** na variável x tem a forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Uma **equação biquadrática** na variável x tem a forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver, fazemos uma substituição de variável $t = x^2$, resolvemos a equação quadrática para t

$$at^2 + bt + c = 0,$$

e posteriormente identificamos as soluções para a variável x.

Exemplo: Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Equações biquadráticas: exemplo

Exemplo: Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solução: Faça a substituição $t = x^2$ e obtenha

$$t^2 - 13t + 36 = 0,$$

Equações biquadráticas: exemplo

Exemplo: Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solução: Faça a substituição $t = x^2$ e obtenha

$$t^2 - 13t + 36 = 0,$$

cujas soluções são $t = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$,

Exemplo: Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solução: Faça a substituição $t = x^2$ e obtenha

$$t^2 - 13t + 36 = 0,$$

cujas soluções são $t = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$, ou seja, há duas soluções $t_1 = \dfrac{13+5}{2} = 9$ e $t_2 = \dfrac{13-5}{2} = 4$.

Equações biquadráticas: exemplo

Exemplo: Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solução: Faça a substituição $t = x^2$ e obtenha

$$t^2 - 13t + 36 = 0,$$

cujas soluções são $t = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$, ou seja, há duas soluções $t_1 = \dfrac{13+5}{2} = 9$ e $t_2 = \dfrac{13-5}{2} = 4$.

Voltando à variável x, precisamos encontrar os valores tais que $t = x^2$.

Equações biquadráticas: exemplo

Exemplo: Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solução: Faça a substituição $t = x^2$ e obtenha

$$t^2 - 13t + 36 = 0,$$

cujas soluções são $t = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$, ou seja, há duas soluções $t_1 = \dfrac{13+5}{2} = 9$ e $t_2 = \dfrac{13-5}{2} = 4$.

Voltando à variável x, precisamos encontrar os valores tais que $t = x^2$. Temos que $9 = x^2$ ou $4 = x^2$, ou seja, o conjunto solução é

$$Sol_{x^4-13x^2+36=0} = \{-3, 3, -2, 2\}.$$

Considere uma equação $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{p(x)}{q(x)}$. Devemos ter cuidado para verificar onde ela está bem definida, ou seja, o seu domínio.

Seu domínio **não pode nunca** incluir os valores onde $g(x) = 0$ ou $q(x) = 0$.

Considere uma equação $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$. Devemos ter cuidado para verificar onde ela está bem definida, ou seja, o seu domínio.

Seu domínio **não pode nunca** incluir os valores onde $g(x) = 0$ ou $q(x) = 0$.

Exemplo: Resolva $\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$.

Considere uma equação $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$. Devemos ter cuidado para verificar onde ela está bem definida, ou seja, o seu domínio.

Seu domínio **não pode nunca** incluir os valores onde $g(x) = 0$ ou $q(x) = 0$.

Exemplo: Resolva $\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$.

Antes de começar a resolver, note que a expressão está definida para quaisquer valores de x exceto $1 - x = 0$ e $x = 0$. Logo, seu domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Equações envolvendo expressões racionais: exemplo

Exemplo: Resolva $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x-2}{x} - 1 = 0.$

Domínio: $\mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1\}$

Solução:

Exemplo: Resolva $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x-2}{x} - 1 = 0$.

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Solução:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$$

Equações envolvendo expressões racionais: exemplo

Exemplo: Resolva $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x-2}{x} - 1 = 0.$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Solução:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{x \cdot x}{(1-x)x} + \frac{(1-x)(x-2)}{(1-x)x} - \frac{(1-x)x}{(1-x)x} = 0 \quad \text{(denominador comum)}$$

Exemplo: Resolva $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x-2}{x} - 1 = 0.$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Solução:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{x \cdot x}{(1-x)x} + \frac{(1-x)(x-2)}{(1-x)x} - \frac{(1-x)x}{(1-x)x} = 0 \quad \text{(denominador comum)}$$

$$\frac{x^2 - x^2 + 3x - 2 - x + x^2}{(1-x)x} = 0 \quad \text{(expandindo)}$$

Equações envolvendo expressões racionais: exemplo

Exemplo: Resolva $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x-2}{x} - 1 = 0.$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Solução:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{x \cdot x}{(1-x)x} + \frac{(1-x)(x-2)}{(1-x)x} - \frac{(1-x)x}{(1-x)x} = 0 \quad \text{(denominador comum)}$$

$$\frac{x^2 - x^2 + 3x - 2 - x + x^2}{(1-x)x} = 0 \quad \text{(expandindo)}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{(1-x)x} = 0 \quad \text{(simplificando)}$$

Equações envolvendo expressões racionais: exemplo

Exemplo: Resolva $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x-2}{x} - 1 = 0.$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 &= 0 \\
\frac{x \cdot x}{(1-x)x} + \frac{(1-x)(x-2)}{(1-x)x} - \frac{(1-x)x}{(1-x)x} &= 0 \qquad \text{(denominador comum)} \\
\frac{x^2 - x^2 + 3x - 2 - x + x^2}{(1-x)x} &= 0 \qquad \text{(expandindo)} \\
\frac{x^2 + 2x - 2}{(1-x)x} &= 0 \qquad \text{(simplificando)}
\end{aligned}$$

Como o domínio exclui $\{0,1\}$, podemos assumir que $x \neq 0$ e $1 - x \neq 1$, portanto podemos multiplicar dos dois lados da equação por $(1-x)x$.

Equações envolvendo expressões racionais: exemplo

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{(1 - x)x} = 0$$

Equações envolvendo expressões racionais: exemplo

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{(1 - x)x} = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \qquad \times\ (1 - x)x$$

Equações envolvendo expressões racionais: exemplo

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{(1-x)x} = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \qquad\qquad \times\,(1-x)x$$

A última equação é uma equação quadrática, cujas soluções são $-1+\sqrt{3}$ e $-1-\sqrt{3}$.

Equações envolvendo expressões racionais: exemplo

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{(1 - x)x} = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \qquad \times\ (1 - x)x$$

A última equação é uma equação quadrática, cujas soluções são $-1 + \sqrt{3}$ e $-1 - \sqrt{3}$. Como ela é equivalente à solução original, então o conjunto solução de $\dfrac{x}{1 - x} + \dfrac{x - 2}{x} - 1 = 0$ é

$$\{-1 + \sqrt{3} \quad , \quad -1 - \sqrt{3}\}$$

■

Equações envolvendo raízes

Em qualquer expressão envolvendo $\sqrt[m]{f(x)}$ tal que m é par, os valores de x para os quais $f(x) < 0$ tem que ser excluídos do domínio da equação, uma vez que não existe a m-ésima raiz quadrada de número real negativo se m é par.

Equações envolvendo raízes

Em qualquer expressão envolvendo $\sqrt[m]{f(x)}$ tal que m é par, os valores de x para os quais $f(x) < 0$ tem que ser excluídos do domínio da equação, uma vez que não existe a m-ésima raiz quadrada de número real negativo se m é par.

Exemplo: Resolva $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$

Solução: Observe que os valores de x para os quais

$$9x+4<0 \quad \text{ou} \quad 3x-4<0 \quad \text{ou} \quad 3x<0$$

não podem fazer parte do domínio,

Em qualquer expressão envolvendo $\sqrt[m]{f(x)}$ tal que m é par, os valores de x para os quais $f(x) < 0$ tem que ser excluídos do domínio da equação, uma vez que não existe a m-ésima raiz quadrada de número real negativo se m é par.

Exemplo: Resolva $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$

Solução: Observe que os valores de x para os quais

$$9x + 4 < 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 4 < 0 \quad \text{ou} \quad 3x < 0$$

não podem fazer parte do domínio, ou seja, está fora do domínio o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4/9\} \;\cup\; \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4/3\} \;\cup\; \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \;=$$

Em qualquer expressão envolvendo $\sqrt[m]{f(x)}$ tal que m é par, os valores de x para os quais $f(x) < 0$ tem que ser excluídos do domínio da equação, uma vez que não existe a m-ésima raiz quadrada de número real negativo se m é par.

Exemplo: Resolva $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$

Solução: Observe que os valores de x para os quais

$$9x + 4 < 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 4 < 0 \quad \text{ou} \quad 3x < 0$$

não podem fazer parte do domínio, ou seja, está fora do domínio o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4/9\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4/3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} =$$
$$= (-\infty; -4/9) \cup (-\infty; 4/3) \cup (-\infty; 0)$$

Em qualquer expressão envolvendo $\sqrt[m]{f(x)}$ tal que m é par, os valores de x para os quais $f(x) < 0$ tem que ser excluídos do domínio da equação, uma vez que não existe a m-ésima raiz quadrada de número real negativo se m é par.

Exemplo: Resolva $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$

Solução: Observe que os valores de x para os quais

$$9x + 4 < 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 4 < 0 \quad \text{ou} \quad 3x < 0$$

não podem fazer parte do domínio, ou seja, está fora do domínio o conjunto

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4/9\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4/3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \\ = & \ (-\infty; -4/9) \cup (-\infty; 4/3) \cup (-\infty; 0) = \\ = & \ (-\infty; 4/3) \end{aligned}$$

Em qualquer expressão envolvendo $\sqrt[m]{f(x)}$ tal que m é par, os valores de x para os quais $f(x) < 0$ tem que ser excluídos do domínio da equação, uma vez que não existe a m-ésima raiz quadrada de número real negativo se m é par.

Exemplo: Resolva $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$

Solução: Observe que os valores de x para os quais

$$9x + 4 < 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 4 < 0 \quad \text{ou} \quad 3x < 0$$

não podem fazer parte do domínio, ou seja, está fora do domínio o conjunto

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4/9\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4/3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \\ = & \ (-\infty; -4/9) \cup (-\infty; 4/3) \cup (-\infty; 0) = \\ = & \ (-\infty; 4/3) \end{aligned}$$

Portanto, Domínio $= \mathbb{R} \setminus (-\infty; 4/3) = [4/3; +\infty)$.

Equações envolvendo raízes

(continuação...) Para a equação $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$ o domínio é $[4/3; +\infty)$.

(continuação...) Para a equação $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$ o domínio é $[4/3; +\infty)$.

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos

$$(9x+4) + 2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} + (3x-4) = 12x,$$

Equações envolvendo raízes

(continuação...) Para a equação $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$ o domínio é $[4/3; +\infty)$.

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos

$$(9x+4) + 2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} + (3x-4) = 12x,$$

e simplificando, obtemos

$$2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} = 0.$$

(continuação...) Para a equação $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$ o domínio é $[4/3; +\infty)$.

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos

$$(9x+4) + 2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} + (3x-4) = 12x,$$

e simplificando, obtemos

$$2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} = 0.$$

Tal igualdade só pode ser verdadeira se $9x+4=0$ ou se $3x-4=0$, o que nos dá as soluções $x = -4/9$ e $x = 4/3$.

(continuação...) Para a equação $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$ o domínio é $[4/3; +\infty)$.

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos

$$(9x+4) + 2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} + (3x-4) = 12x,$$

e simplificando, obtemos

$$2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} = 0.$$

Tal igualdade só pode ser verdadeira se $9x+4=0$ ou se $3x-4=0$, o que nos dá as soluções $x = -4/9$ e $x = 4/3$. **Mas cuidado!** As soluções necessariamente precisam estar no domínio $[4/3; +\infty)$, logo só há uma solução $x = 4/3$. ∎

Equações envolvendo módulo (valor absoluto)

Nestas equações, devemos sempre ter o cuidado de considerar separadamente os intervalos onde cada expressão dentro de um módulo é positiva, e onde é negativa.

Exemplo 1: Resolva $|x + 1| = 3$.

Nestas equações, devemos sempre ter o cuidado de considerar separadamente os intervalos onde cada expressão dentro de um módulo é positiva, e onde é negativa.

Exemplo 1: Resolva $|x+1| = 3$.

Solução: Consideramos separadamente os casos:
(1) $x+1 \geq 0$; e
(2) $x+1 < 0$.

(continua...)

Equações envolvendo módulo: exemplo 1

(continuação...) Resolver $|x+1| = 3$

Caso 1: $x + 1 \geq 0$.

Equações envolvendo módulo: exemplo 1

(continuação...) Resolver $|x+1|=3$

Caso 1: $x+1\geq 0$. Neste caso, a equação se torna $x+1=3$, cuja solução é $x=2$.

(continuação...) Resolver $|x+1| = 3$

Caso 1: $x + 1 \geq 0$. Neste caso, a equação se torna $x + 1 = 3$, cuja solução é $x = 2$. **Sempre devemos tomar o cuidado** de verificar se as soluções encontradas satisfazem as hipóteses;

(continuação...) Resolver $|x + 1| = 3$

Caso 1: $x + 1 \geq 0$. Neste caso, a equação se torna $x + 1 = 3$, cuja solução é $x = 2$. **Sempre devemos tomar o cuidado** de verificar se as soluções encontradas satisfazem as hipóteses; neste caso, verificar se $x = 2$ satisfaz $x + 1 \geq 0$, ou seja, se satisfaz $x \geq -1$.

(continuação...) Resolver $|x+1|=3$

Caso 1: $x+1 \geq 0$. Neste caso, a equação se torna $x+1=3$, cuja solução é $x=2$. **Sempre devemos tomar o cuidado** de verificar se as soluções encontradas satisfazem as hipóteses; neste caso, verificar se $x=2$ satisfaz $x+1 \geq 0$, ou seja, se satisfaz $x \geq -1$. Como satisfaz, então $x=2$ é uma solução.

(continuação...) Resolver $|x+1| = 3$

Caso 1: $x+1 \geq 0$. Neste caso, a equação se torna $x+1=3$, cuja solução é $x=2$. **Sempre devemos tomar o cuidado** de verificar se as soluções encontradas satisfazem as hipóteses; neste caso, verificar se $x=2$ satisfaz $x+1 \geq 0$, ou seja, se satisfaz $x \geq -1$. Como satisfaz, então $x=2$ é uma solução.

Caso 2: $x+1 < 0$.

(continuação...) Resolver $|x+1| = 3$

Caso 1: $x + 1 \geq 0$. Neste caso, a equação se torna $x + 1 = 3$, cuja solução é $x = 2$. **Sempre devemos tomar o cuidado** de verificar se as soluções encontradas satisfazem as hipóteses; neste caso, verificar se $x = 2$ satisfaz $x + 1 \geq 0$, ou seja, se satisfaz $x \geq -1$. Como satisfaz, então $x = 2$ é uma solução.

Caso 2: $x + 1 < 0$. Neste caso, a equação se torna $-(x+1) = 3$, cuja solução é $x = -4$.

Equações envolvendo módulo: exemplo 1

(continuação...) Resolver $|x+1| = 3$

Caso 1: $x + 1 \geq 0$. Neste caso, a equação se torna $x + 1 = 3$, cuja solução é $x = 2$. **Sempre devemos tomar o cuidado** de verificar se as soluções encontradas satisfazem as hipóteses; neste caso, verificar se $x = 2$ satisfaz $x + 1 \geq 0$, ou seja, se satisfaz $x \geq -1$. Como satisfaz, então $x = 2$ é uma solução.

Caso 2: $x + 1 < 0$. Neste caso, a equação se torna $-(x + 1) = 3$, cuja solução é $x = -4$. Verificando se a solução satisfaz a hipótese $x + 1 < 0$, ou seja, $x < -1$, vemos que não há problema nenhum com esta solução.

Equações envolvendo módulo: exemplo 1

(continuação...) Resolver $|x+1| = 3$

Caso 1: $x+1 \geq 0$. Neste caso, a equação se torna $x+1=3$, cuja solução é $x=2$. **Sempre devemos tomar o cuidado** de verificar se as soluções encontradas satisfazem as hipóteses; neste caso, verificar se $x=2$ satisfaz $x+1 \geq 0$, ou seja, se satisfaz $x \geq -1$. Como satisfaz, então $x=2$ é uma solução.

Caso 2: $x+1<0$. Neste caso, a equação se torna $-(x+1)=3$, cuja solução é $x=-4$. Verificando se a solução satisfaz a hipótese $x+1<0$, ou seja, $x<-1$, vemos que não há problema nenhum com esta solução. Logo, $x=-4$ é outra solução.

Conclusão: O conjunto solução para $|x+1|=3$ é $\{-4,2\}$. ■

Exemplo 2: Resolva $|x-1|-2|x-2|=-3$

Solução: Para $|x-1|$, consideramos os casos $x-1<0$ e $x-1\geq 0$, ou seja, $x<1$ e $x\geq 1$, respectivamente.

Exemplo 2: Resolva $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Solução: Para $|x-1|$, consideramos os casos $x-1<0$ e $x-1 \geq 0$, ou seja, $x<1$ e $x \geq 1$, respectivamente. Para $|x-2|$, de maneira similar, temos os casos $x<2$ e $x \geq 2$.

Exemplo 2: Resolva $|x-1|-2|x-2|=-3$

Solução: Para $|x-1|$, consideramos os casos $x-1<0$ e $x-1\geq 0$, ou seja, $x<1$ e $x\geq 1$, respectivamente. Para $|x-2|$, de maneira similar, temos os casos $x<2$ e $x\geq 2$. Portanto, para a equação $|x-1|-2|x-2|=-3$ há 3 casos distintos:

(1) $x<1$
(2) $x\geq 1$ e $x<2$, ou seja, $1\leq x<2$
(3) $x\geq 2$

(continua...)

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 1: $x < 1$.

(continuação...) Resolver $|x-1|-2|x-2|=-3$

Caso 1: $x<1$. Neste caso, $|x-1|=-(x-1)$ e $|x-2|=-(x-2)$, o que torna a equação

$$-(x-1)-2[-(x-2)] \quad = \quad -3$$

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 1: $x < 1$. Neste caso, $|x-1| = -(x-1)$ e $|x-2| = -(x-2)$, o que torna a equação

$$\begin{aligned} -(x-1) - 2[-(x-2)] &= -3 \\ 1 - x + 2(x-2) &= -3 \end{aligned}$$

(continuação...) Resolver $|x-1|-2|x-2|=-3$

Caso 1: $x<1$. Neste caso, $|x-1|=-(x-1)$ e $|x-2|=-(x-2)$, o que torna a equação

$$\begin{aligned} -(x-1)-2[-(x-2)] &= -3 \\ 1-x+2(x-2) &= -3 \\ 1+x-4 &= -3 \end{aligned}$$

(continuação...) Resolver $|x-1|-2|x-2|=-3$

Caso 1: $x<1$. Neste caso, $|x-1|=-(x-1)$ e $|x-2|=-(x-2)$, o que torna a equação

$$\begin{aligned}
-(x-1)-2[-(x-2)] &= -3\\
1-x+2(x-2) &= -3\\
1+x-4 &= -3\\
x &= 0
\end{aligned}$$

que é solução pois $x=0$ satisfaz $x<1$.

Equações envolvendo módulo: exemplo 2

(continuação...) Resolver $|x-1|-2|x-2|=-3$

Caso 2: $1 \leq x < 2$.

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 2: $1 \leq x < 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = -(x-2)$, o que torna a equação

$$x - 1 - 2[-(x-2)] \quad = \quad -3$$

(continuação...) Resolver $|x - 1| - 2|x - 2| = -3$

Caso 2: $1 \leq x < 2$. Neste caso, $|x - 1| = x - 1$ e $|x - 2| = -(x - 2)$, o que torna a equação

$$\begin{aligned} x - 1 - 2[-(x - 2)] &= -3 \\ x - 1 + 2(x - 2) &= -3 \end{aligned}$$

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 2: $1 \leq x < 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = -(x-2)$, o que torna a equação

$$
\begin{aligned}
x - 1 - 2[-(x-2)] &= -3 \\
x - 1 + 2(x-2) &= -3 \\
3x - 5 &= -3
\end{aligned}
$$

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 2: $1 \leq x < 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = -(x-2)$, o que torna a equação

$$\begin{aligned} x-1-2[-(x-2)] &= -3 \\ x-1+2(x-2) &= -3 \\ 3x-5 &= -3 \\ 3x &= 2 \end{aligned}$$

(continuação...) Resolver $|x-1|-2|x-2|=-3$

Caso 2: $1 \leq x < 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = -(x-2)$, o que torna a equação

$$\begin{aligned}
x-1-2[-(x-2)] &= -3 \\
x-1+2(x-2) &= -3 \\
3x-5 &= -3 \\
3x &= 2 \\
x &= 2/3
\end{aligned}$$

que **não é solução** pois $x = 2/3$ **não satisfaz** $1 \leq x < 2$.
(2/3 é menor que 1)

Equações envolvendo módulo: exemplo 2

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 3: $x \geq 2$.

(continuação...) Resolver $|x-1|-2|x-2|=-3$

Caso 3: $x \geq 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = x-2$, o que torna a equação

$$x-1-2(x-2) \quad = \quad -3$$

Equações envolvendo módulo: exemplo 2

(continuação...) Resolver $|x-1|-2|x-2|=-3$

Caso 3: $x \geq 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = x-2$, o que torna a equação

$$\begin{aligned} x-1-2(x-2) &= -3 \\ x-1-2(x-2) &= -3 \end{aligned}$$

Equações envolvendo módulo: exemplo 2

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 3: $x \geq 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = x-2$, o que torna a equação

$$\begin{aligned} x - 1 - 2(x-2) &= -3 \\ x - 1 - 2(x-2) &= -3 \\ -x + 3 &= -3 \end{aligned}$$

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 3: $x \geq 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = x-2$, o que torna a equação

$$\begin{aligned} x-1-2(x-2) &= -3 \\ x-1-2(x-2) &= -3 \\ -x+3 &= -3 \\ -x &= -6 \end{aligned}$$

(continuação...) Resolver $|x-1|-2|x-2|=-3$

Caso 3: $x \geq 2$. Neste caso, $|x-1|=x-1$ e $|x-2|=x-2$, o que torna a equação

$$\begin{aligned} x-1-2(x-2) &= -3 \\ x-1-2(x-2) &= -3 \\ -x+3 &= -3 \\ -x &= -6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

que é solução pois $x=6$ satisfaz $x \geq 2$.

Equações envolvendo módulo: exemplo 2

(continuação...) Resolver $|x-1| - 2|x-2| = -3$

Caso 3: $x \geq 2$. Neste caso, $|x-1| = x-1$ e $|x-2| = x-2$, o que torna a equação

$$
\begin{aligned}
x - 1 - 2(x-2) &= -3 \\
x - 1 - 2(x-2) &= -3 \\
-x + 3 &= -3 \\
-x &= -6 \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

que é solução pois $x = 6$ satisfaz $x \geq 2$.

Conclusão: o conjunto solução é $\{0, 6\}$. ■

Para casa

- ler a seção A.1 (texto de Armando & Caputi, Apêndice A, pp. 267–276) que é uma revisão de conceitos básicos de matemática do ensino médio: polinômios, produtos notáveis, divisão de polinômios, expressões racionais. Recomenda-se o seu estudo e a resolução dos exercícios correspondentes.
- ler a seção A.2 em detalhes e fazer os exercícios